



TITLE:

有限要素法解析による浅海波の変
形特性に関する研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

滝川, 清

CITATION:

滝川, 清. 有限要素法解析による浅海波の変形特性に関する研究. 京都大学, 1984, 工学博士

ISSUE DATE:

1984-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r5248>

RIGHT:

有限要素法解析による浅海波の
変形特性に関する研究

昭和 58 年 11 月

滝川 清

有限要素法解析による浅海波の変形特性に関する研究

正 誤 表

頁	訂 正 ケ 所	誤	正
P 2	上から2行目	----- 微小振幅波近似 -----	----- 微小振幅波近似 -----
P 16	下から3行目	----- Helmholtz 型 -----	----- Helmholtz 型 -----
P 25	上から2行目	----- における不規則波を含 -----	----- における不規則波を含 -----
"	下から1行目	$\eta_{il} = a_{in} \cdot \sin($ -----	$\eta_{il} = a_{il} \cdot \sin($ -----
P 27	下から10行目	$\sum_l \sigma_{il} \frac{\cosh k_{il} (h_i + z)}{\sinh k_{il} h_i}$ -----	$\sum_l \sigma_{il} \frac{\cosh k_{il} (h_i + z)}{\sinh k_{il} h_i}$ -----
P 34	下から4行目	$\frac{\partial}{\partial t} () (\dot{ })$ と -----	$\frac{\partial}{\partial t} ()$ を $(\dot{ })$ と -----
P 35	上から4行目	$\phi =$ -----	$\theta =$ -----
P 40	図- 2.4.9	(b) $x/L_m = L_m$	(b) $x/L_m = 1$
"	"	(c) $x/L_m = 2L_m$ -----	(c) $x/L_m = 2$ -----
P 101	下から6行目	方程式を連成して -----	方程式を連立して -----
P 145	上から1行目	8) Biesel, f. -----	8) Biesel, F. -----

有限要素法解析による浅海波の 変形特性に関する研究

昭和 58 年 11 月

滝 川 清

目 次

第 1 章 緒 論	1
第 2 章 有限要素法による浅海波動の解析法	
第 1 節 概 説	7
第 2 節 微小振幅波の解析法	8
(1) 基 礎 式	8
(2) 変分原理	10
(3) 有限要素法による定式化	11
(4) 仮想境界の条件	14
第 3 節 有限振幅波の解析法	17
(1) 基 礎 式	17
(2) 変分原理	18
(3) 有限要素法による定式化	20
a) 空間方向への離散化	20
b) 時間差分	23
(4) 仮想境界の条件	24
第 4 節 計算精度の検討と適用計算例	31
(1) 要素の分割方法と計算精度	31
(2) 時間差分の検討	34
(3) 適用計算結果と考察	36
a) 微小振幅波	36
b) 有限振幅波	37
第 5 節 結 語	49
第 3 章 有限要素法解析による波と構造物の相互作用に関する研究	
第 1 節 概 説	52
第 2 節 潜堤の消波特性に関する研究	52
(1) 有限要素法による透過性領域を含む波動場の解析法	53
a) 基 礎 式	54

b) 有限要素法による定式化	56
c) 計算方法の検証と適用計算例	58
(2) 離岸潜堤の消波機構に関する考察	64
a) 計算方法と潜堤のモデル	64
b) 計算結果と考察	65
第 3 節 波による浮体の運動と波の変形に関する研究	73
(1) 有限要素法による波と浮体の相互運動系の解析法	74
a) 有限振幅運動系の解析法	74
b) 微小振幅運動系の解析法	84
(2) 物体強制運動による造波特性	87
(3) 波による短形断面浮体の運動と波の変形	92
第 4 節 結 語	101
第 4 章 有限要素法解析による斜面上の波の碎波変形とその内部機構に関する研究	
第 1 節 概 説	104
第 2 節 斜面上の波の碎波変形に関する実験と数値計算方法	105
(1) 実験装置	105
(2) 実験方法	107
(3) 数値計算方法	107
第 3 節 水深減少に伴う波の変形と碎波に関する検討	112
(1) 碎波指標および碎波形式の検討	112
(2) 水深減少に伴う波高、波速および波形の変化	114
第 4 節 斜面上の波の碎波変形と内部機構に関する検討	123
(1) 水深減少に伴う水粒子速度の変化	123
(2) 碎波近傍での波動場の特性に関する考察	137
a) 水粒子エネルギーの分布特性	137
b) 加速度場の特性	140
第 5 節 結 語	143
第 5 章 結 論	147

第 1 章 緒 論

国土が狭小で資源の乏しいわが国にとって、海洋空間の利用、とくに、沿岸海域の有効利用は、将来にわたってのわが国産業経済ならびに社会の発展のための重要な課題の1つである。ことに、四周を海に囲まれたわが国の厳しい自然条件の中での沿岸海域の開発は、海岸の防災と海岸環境保全との調和を保ちつつ、高度な利用推進を図る必要があり、その技術的基礎としての海岸工学に課せられた使命は大きく、かつ広範なものである。

自然美に恵まれ、多くの景勝地を有するわが国の沿岸海域は、古くから地域住民の生活、生産また憩いの場として利用され、親しまれてきたが、近年の社会、経済の発展とともに、工業用地あるいは住宅用地としての埋立て、港湾構造物の築造などの利用・開発が盛んに行われて、わが国の経済基盤の確立に貢献した。しかし、その反面、この急激な発展は、環境の汚染や自然破壊など自然環境の悪化を進行させ、また、海岸侵食の進行など海岸保全上にも重大な問題を引き起こしている。さらに、最近では、海岸の多様な価値、たとえば、日常生活やレクリエーションの場、あるいは景観そのものの価値が高まりつつあり、また、生態学上や水質保全上の海浜の役割の重要性も主張されており、今後さらに、このような海岸の多目的にわたる利用価値が増大するものと考えられる。

このような沿岸海域の利用・開発の状況のもとで、浅海波浪の特性をはじめ、これに伴う海浜過程の究明など、技術的問題としての自然現象の理解は、これまで以上に十分なものでなければならない。

すなわち、沿岸海域における波浪特性の究明に際しては、より実際的狀況での浅海波浪の変形特性の十分な究明は無論のこと、海岸工事等にかかわる地形や流況の変化による波浪特性や、これに伴う海浜過程の変化など、各種の沿岸波動現象の有機的な関連においての究明が重要であり、また、長期的な観点からつねに、経過の一環としての沿岸波動現象を把握し、影響予測を行うことが重要である。

浅海域での波浪特性の究明は、波浪予知や海岸・港湾構造物の設計に際して必須の基本的事項であるが、浅海における波浪は、水深の減少とともに、波高は増大し、波形は次第に前傾化して非対称性が著しくなっており、ついには碎波に至るなど、非線形性の強い現象を含んでいる。このため、波の浅水変形についての純数学的な取り扱いが困難であり、また、数値的な解析においても、波浪の非線形効果を十分考慮した解析例も数少なく、現在なお浅海波浪の変形に関する決定的な解析手法は確立されていない。

このような、浅海域における波の変形特性を精度よく解明し、海岸での複雑な波動現象を正確に把握することは、海岸工学上ならびに海岸水理学上、重要な課題の1つである。したがって、以下には、このような浅水化に伴う波の変形についての従来の理論的研究の概略を述べ、それらの問題点を示す。

波の浅水化にともなう理論的研究の方法としては、波動の基礎方程式を対象に、これを数値的または解析的に解く方法、あるいは、波動のエネルギー保存則の概念のもとに、一定水深における波動理論を拡大適用して浅水化にともなう波の変形を論ずるエネルギー・フラックス法に大別される。

解析的な方法は、傾斜面上における波動の基礎式に対する近似解を用いてその変形を論ずるもので、Lewy¹⁾、Stoker²⁾、Friedrichs³⁾ および Keller⁴⁾ などの研究があるが、これらは微少振幅波近似による線形解を示しているにすぎない。また、Stoker⁵⁾ の浅水理論の第 1 近似を基本方程式として、Amein⁶⁾ は特性曲線法を用いた数値計算を行っており、さらに、岩垣・酒井⁷⁾ は、同様の浅水理論を用いて、これの摂動展開によって水底勾配の影響を明らかにしたが、これらの浅水理論近似による方法は、水深方向の圧力分布を静水圧分布とし、また、水粒子速度の鉛直分布も一様であると仮定しているため、これらの適用には限界がある。また、孤立波の斜面上での変形については、Mei⁸⁾、Peregrine⁹⁾、Madsen¹⁰⁾ による研究がある。Peregrine⁹⁾ は浅水近似による非線形方程式を誘導して、斜面上での孤立波の変形について差分法を用いた数値計算を試み、Madsen¹⁰⁾ は Peregrine⁹⁾ の方法を改良した計算条件のもとで、Mei⁸⁾ の基本式にもとづいた特性曲線法を用いて傾斜面上を進行する孤立波の変形状態を解析した。また、その後、角谷¹¹⁾ および Johnson¹²⁾ は、K-d V 方程式に傾斜面勾配の影響を考慮して非線形方程式を誘導した。この K-d V 方程式を用いたものとして、Svendsen¹³⁾ は緩勾配斜面上に対するクノイド波の変形を求めて実験との比較を行い、また、安田¹⁴⁾ は斜面勾配の影響をあらわに評価した K-d V 方程式の数値解を示している。このように、浅水近似による解析的方法においては、波動の非線形性や斜面勾配の効果を含んだ水面変動に関する波動方程式が誘導されているが、これらによる十分な精度の解析結果は得られておらず、また、これら水面変動に関する波動方程式は、元来、水深方向に変化する量を底から水面まで積分して表現するものであり、任意な海底形状の変化や波動の非線形効果などを十分に表現することができず、一般的な状況での波動問題を解く場合には数値計算法によらざるを得ない。

つぎに、エネルギー・フラックス法により波の変形を論ずる方法は、“水深の変化する海底上の波は、同じ水深の水平な海底上の波と同じ特性を有する”という、いわゆる Rayleigh¹⁵⁾ の仮定のもとに、水深が変化しても一周平均の波のエネルギー・フラックスの値が不変であることを用いて、水深の減少に伴う波の特性量の変化を調べるものである。波の平均のエネルギー・フラックスとしては、一様水深における波理論の表現が用いられる。この方法による研究は、Le Méhauté¹⁶⁾ が Stokes 波の第 3 次近似解を用いて計算して以来、数多くの波動理論を適用した計算が示されている。岩垣・酒井^{17),18)} は、クノイド波の第 2 近似解の初等関数表示であるハイパボリック波理論を用い、Svendsen¹⁹⁾ は、クノイド波の第 1 次近似解を用いて研究した。また、山口・土屋²⁰⁾ は、波速の第 2 定義にもとづく Stokes 波の第 4 近似解およびクノイド波の第 2 近似解を用いて計算して、波速の第 1 定義による場合との違いを調べた。最近では、酒井・Battjes²¹⁾ が、定形進行波の厳密解と考えられる Cokelet の理論²²⁾ を用いて波高変化の計算を行っている。これらエネルギー・フラックス法は、上述のように波高、波速、波長など波の平均的特性量の変化を調べるのに有用とされるが、適用すべき波動理論によって、その適用限界が決定され、また、基本的に一定水深上の定形波理論を拡大適用するので、水底勾配の効果を表現することはできず、一般的な波動場への適用には限界がある。

上述したように、水深の減少に伴う波の変形について、従来より数多くの非線形理論が展開されているにもかかわらず、これらの理論における固有の制限や仮定のために、実際の波動問題に対する適用性は、かなりの制約をうけるものである。

一方、波動の基礎式を直接数値的に解く方法としての数値計算法は、上述の理論解析的な方法のように、波の変形特性を一般的に表示するには適していないが、実際的な条件によく対応した取り扱いをすることが可能で、また、実験的に測定困難な波動の特性を容易に知ることができるなどの利点を有し、数値実験あるいは数値シミュレーションとして広く研究されている。

流体問題に関する数値計算法^{23), 24)}としては、差分法、特性曲線法、有限要素法、MAC法およびSUMMAC法など多くの計算方法が用いられている。水深減少にともなう波の変形を論じたものは、特性曲線法によるものとして、Freeman²⁵⁾、Peregrine⁹⁾、Madsen¹⁰⁾などの計算例がある。また、MAC法は、自由表面をもつ流れの数値計算法として開発されたもので、Navier-Stokesの方程式を対象とし、これに差分計算のアルゴリズムを適用する方法である。これを修正したSUMMAC法を用いて、斜面上での孤立波の変形を論じたChan²⁶⁾、和田²⁷⁾の研究がある。また、有限要素法²⁸⁾を用いたものとしては、松田・岩崎²⁹⁾が斜面上での長波の変形を解析した例があるにすぎない。

有限要素法は、航空機の翼の応力問題の解析³⁰⁾にその方法が発表されたのが始まりとされ、構造力学の分野を中心として発展し、その後、J. T. Oden^{31), 32)}やO. C. Zienkiewicz³³⁾などの研究および応用数学者らによって、その数学的基盤が確立されるとともに、Galerkin法などの重みつき残差法³⁴⁾ (Weighted residual method)の導入によって一般的な数値解析法としてその応用範囲を広げ、最近では、各分野において、連続体の解析法として広く用いられるに至っている。

この有限要素法は、計算の対象とする微分方程式の離散化において、差分法と異なった手法を用い、両者ともそれぞれに特色をもつ計算手法であるが、その離散化方法は本質的には等価³⁵⁾なものである。しかしながら、実際の計算を行う上で、とくに、有限要素法は、要素分割形状を任意に選ぶことができ、境界形状を正確に表現しやすいこと、また、境界条件の取り扱いにおいても、その物理的意味づけが明確にされ、計算プログラムの汎用化が容易であるなど多くの利点を有する計算方法である。このような有限要素法の波動問題への適用は、まだ緒についた段階であり、さらに、波動方程式の非線形性などのため計算上の難しさもあって、これまで波の有限振幅性を考慮した計算の適用例も数少く、計算上有利な特徴を有しながらも、その適用は十分なものではない。

このような観点から、本研究は、浅海域での波の変形現象を、より実際の状況で解明するために、数値シミュレーション法としての有限要素法の適用を試みたものであって、この計算手法の確立と適用計算を行って、浅海波の変形特性について明らかにする。以下では、本研究における各章の研究方法与内容の概略を述べる。

第2章においては、微小振幅および有限振幅の浅海波に対して、これらを、速度ポテンシャルで表現された2次元境界値問題として取り扱い、運動を支配する汎関数を示して、有限要素法による定式化を

行う。また、仮想境界を考慮した取り扱いを示して、任意の境界形状および境界領域を進行する微小振幅の定常波動および不規則波を含む有限振幅波の非定常な運動を解析する手法を示し、これらの適用計算および実験結果との比較によって、本計算手法の検証を行い、その実用性を示す。

第3章においては、浅海での構造物による波の変形あるいは波の制御効果など、波と構造物との相互作用の問題を取りあげ、これを2次元境界値問題への有限要素法の適用例として、潜堤の消波特性および波と浮体との相互作用系の運動特性を検討した。

まず、透過性構造物など流体抵抗がある場合の波動問題に対して、波圧を連続関数とした取り扱いにより、任意の構成材より成る任意形状の透過性領域問題に容易に適用できる有限要素法による解析方法を示し、その適用計算によって計算手法の検証と実用性を確かめる。ついで、透過、不透過および水平板式干渉型の潜堤をとりあげ、これらの離岸潜堤としての消波特性について考察する。

さらに、波と浮体との相互作用問題について、速度ポテンシャルで表現した浮体運動および流体運動の方程式を連成して解く方法を示し、有限要素法の移動境界値問題への拡張を行う。この適用計算と実験結果との比較によって本計算手法の検証を行うとともに、物体強制運動による造波特性および波による浮体の運動、とくに共振周波数近傍における相互運動の特性について検討する。

第4章においては、浅海域での波の変形の極限としての砕波現象を明らかにするために、第2章で著者が示した有限要素法による有限振幅波の解析方法を斜面上の砕波変形に適用することを試みる。さらに、L. D. V. を用いた水粒子速度の実験を行って、本数値シミュレーション手法の妥当性を検証するとともに、砕波に至る変形過程での水粒子速度場や加速度場などの内部機構の特性について検討する。

最後に、第5章の結論においては、本論文で得られた主要な研究成果を要約する。

参 考 文 献

- 1) Lewy, H.: Water waves on sloping beaches, Bulletin of the American Math. Soc., Vol. 52, 1946.
- 2) Stoker, J. J.: Surface waves in water of variable depth, Quarterly of Appl. Math., Vol. V, No. 1, pp. 1-54, 1947.
- 3) Friedrichs, K. O.: Water waves on a shallow sloping beach, Commun. on pure and Appl. Math., Vol. 1, pp. 109-134, 1948.
- 4) Keller, J. B.: Surface waves on water of non-uniform depth, Jour. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 607-614, 1958.

- 5) Stoker, J. J. : Water waves, Interscience Pub. Inc., New York, pp. 69-84, 95-109, 1957.
- 6) Amein, M. : A method for determining the behavior of long waves climbing a sloping beach, Jour. Geophysical Res., Vol. 71, No. 2, pp. 401-410, 1966.
- 7) 岩垣雄一・酒井哲郎：一様勾配斜面上の有限振幅長波について，土木学会論文報告集，第 196 号，pp. 65-74, 1971.
- 8) Mei, C. C. and B. Le Méhauté : Note on the equations of long waves over an uneven bottom, Jour. Geophysical Res., Vol. 71, No. 2, pp. 393-400, 1966.
- 9) Peregrine, D. H. : Long waves on a beach, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, No. 4, pp. 815-827, 1967.
- 10) Madsen, O. S. and C. C. Mei : The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, No. 4, 1969.
- 11) Kakuṭani, T. : Effect of an uneven bottom on gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272-276, 1971.
- 12) Johnson, R. S. : On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 73, pp. 183-203, 1973.
- 13) Svendsen, I. A. and J. B. Hansen : On the deformation of periodic long waves over a gently sloping bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 87, Part 3, pp. 433-448, 1978.
- 14) 安田孝志・山下隆男・後藤真太郎・土屋義人：K-dV 方程式による斜面上の波の変形，第 26 回海岸工学講演会論文集，pp. 21-25, 1979.
- 15) Rayleigh, Lord : Hydrodynamical notes, Phil. Mag., Ser 6, Vol. 21, pp. 177-187, 1911.
- 16) Le Méhauté, B. and L. M. Webb : Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order approximation, Proc. of the 9th Conf. on Coastal Eng., pp. 23-40, 1964.
- 17) 岩垣雄一・酒井哲郎：有限振幅波の shoaling について，第 14 回海岸工学講演会講演集，pp. 1-7, 1967.
- 18) 岩垣雄一・酒井哲郎：有限振幅波の shoaling について(2)，第 15 回海岸工学講演会講演集，pp. 10-15, 1968.
- 19) Svendsen, I. A. and O. Brink-Kjaer : Shoaling of Cnoidal waves, Proc. of the 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 365-383, 1972.
- 20) 山口正隆・土屋義人：有限振幅波理論に基づく波の shoaling について，第 22 回海岸工学講演会論文集，pp. 59-63, 1975.
- 21) 酒井哲郎・J. A. Battjes : Cnoidal の理論による波の浅水変形，第 27 回海岸工学講演会論文集，pp. 25-29, 1980.

- 22) Cokelet, E.D. : Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 286, pp. 183-230, 1977.
- 23) 土木学会編 : 土木工学における数値解析 / 流体解析編, サイエンス社
- 24) 日野幹雄 : 数値シミュレーションと海岸工学, 1974年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会
- 25) Freeman, J. C. and B. Le Méhauté : Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, Proc. ASCE, Vol. 90, No. HY2, pp. 187-216, 1964.
- 26) Chan, R. K. C. and R. L. Street : Shoaling of finite-amplitude waves on plane beach, Proc. of the 12th Conf. on Coastal Eng., pp. 345-361, 1970.
- 27) 和田明 : 数値モデルによる有限振幅波の研究, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 387-392, 1973.
- 28) たとえば, Zienkiewicz, O. C. : The finite element method in engineering science, McGraw Hill, London, 1971.
- 29) 松田健志・岩崎敏夫 : 有限要素法による長波の変形の解析, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 93-96, 1975.
- 30) Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp : Stiffness and deflection analysis of complex structures, Jour. of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 9, 1956.
- 31) Oden, J. T. and D. Somogyi : Finite element applications in fluid dynamics, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM3, pp. 821-826, 1968.
- 32) Oden, J. T. : A finite element analog of the Navier-Stokes equations, Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM4, pp. 529-534, 1970.
- 33) Zienkiewicz, O. C. and C. Taylor : Weighted residual processes in finite element with particular reference to some transient and coupled problems, Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics, UAH Press, 1973.
- 34) たとえば, Finlayson, B. A. : The method of weighted residuals and variational principles, Academic Press, New York, 1972.
- 35) 坂井藤一 : 有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法, 土木学会論文報告集, 第220号, pp. 39-51, 1973.

第 2 章 有限要素法による浅海波動の解析法

第 1 節 概 説

沿岸における波浪は、海底地形や沿岸構造物あるいは海岸地形などによって変形を受ける。これは、いわゆる浅水、反射、屈折、回折などによる複雑な現象の結果であって、これらの波の挙動を解明し、各種の地形に対して正確な評価ができるようにすることは、近年の海洋開発の動向ともあいまって、海岸工学上重要な問題である。

しかしながら、浅海域での波の変形過程は複雑な非線形現象であって、その挙動を理論的に解析することは非常に困難である。また、数値計算法においても、任意の海底地形に対し、さらに波の有限振幅性を考慮して、十分な精度で波の変形過程を解析することは難しく、これまで浅海波を取扱ったシミュレート例は非常に数少なく、^{1), 2), 3)} とくに、有限要素法を用いた解析例は非常に少ない。しかも、波動問題に対する有限要素法による従来の解析例は、そのほとんどが微小振幅波を対象としたものである。

波動問題への有限要素法の適用は、Taylor ら⁴⁾ が港湾の固有振動問題に適用したのが最初と思われるが、これは、Helmholtz 型方程式を基礎とし、いわゆる閉された領域での波動の振動問題を取り扱ったものである。その後、Berkhoff⁵⁾ は、開領域での波動の屈折・回折問題への適用を示し、Bai⁶⁾ は無限領域への波動の伝播問題を取り扱った。また、わが国では、坂井ら^{7), 8), 9)} が同様に Helmholtz 型の方程式を基礎とした微小振幅波の伝播、湾水振動および波の散乱問題を取り扱った。また、波の有限振幅性を考慮した有限要素法による解析例は、松田・岩崎¹⁰⁾ が有限振幅長波方程式および Boussinesq 方程式を解析した例が報告されているにすぎない。

しかしながら、これらの Helmholtz 型方程式を対象とした微小振幅波の解析法および長波方程式を対象とした解析法は、流体の運動方程式を水深方向に積分した水面波動についての方程式を基としたものであり、これは、計算点での水深に対応する浅海波の波数を与える必要があり、海底形状など境界形状が任意に変化する場合などに対してはその適用範囲が制限される。また、解析の対象としている微小振幅あるいは長波理論そのものの適用限界によって、その適用範囲が決定されることになり、一般的な浅海域での波動のシミュレート法としては、なお不十分な点が多い。

一方、数値解析を行う場合には、必然的に有限な領域を取り扱うことになるが、この解析上の仮想境界における入射波、反射波および通過波についての処理が難しく、このことが、この種の解析を困難にしている原因の 1 つである。このような、仮想境界の処理方法としては、微小振幅の定常波動に関して、数種の方法が示されている。Bai⁶⁾ は Sommerfeld の放射条件を適用する方法を示し、坂井⁹⁾ は、無限遠での放射条件を満足する Green 関数を有限要素法に接続させる Berkhoff⁵⁾ と類似の方法を適用し、Zienkiewicz ら^{11), 12)} は、無限要素および境界積分要素を用いる方法を示しており、また、井島^{13), 14)}

はポテンシャル接続法を用いた処理を行って Green 公式による任意の境界形状領域での微小振幅波の解析方法を示した。しかしながら、有限振幅波の非定常な波動に対する仮想境界での処理方法について示したものは、著者が本章で示す方法以外では、最近の井島ら³⁾によるフーリエ級数展開法が示されているに過ぎない。

このように、波動問題に対する有限要素法による従来の解析例は、微小振幅波の解析においても水深変化など境界形状変化に関し厳密なものでなく、さらに、一般的な浅海域を進行する有限振幅波の運動を解析する方法は示されていない。

ここで示す、本研究での解析方法は、水深方向に積分を行わないもとのポテンシャル理論に基づく波動の基礎式を対象として、これに直接変分原理を適用した有限要素法を用いることによって、水深変化を直接考慮できるようにし、さらに仮想境界での流体運動の連続条件を考慮した処理を行って、任意境界形状および境界領域を進行する微小振幅波および有限振幅波の運動を解析するものである。

まず、第2節では、速度ポテンシャルで表現された微小振幅波の基礎式および境界条件式に対して、これの変分原理を示し、有限要素法を適用して定常波動の定式化を示す。さらに、ポテンシャル接続法を利用した仮想境界の処理方法を適用して任意境界形状および任意境界領域での微小振幅定常波動の解析方法を示す。

第3節では、第2節と同様に速度ポテンシャルで表現される有限振幅波の非線形な基礎式および境界条件式に対する変分原理を示し、有限要素法を適用して、非定常な波動とした定式化を示す。さらに、仮想境界では、任意時刻に対する流体運動の mass - flux および energy - flux を満足させる解を定める方法を用いて、規則波のみならず不規則な波の運動にも適用し得る仮想境界処理方法を述べて、任意形状および任意境界領域での有限振幅波の運動を解析する方法を示す。

第4節では、第2節および第3節で示した微小振幅波および有限振幅波の解析方法の検証計算とその適用性について検討する。とくに、解くべき連立方程式の元数が必要以上に大きくならないよう留意した要素の分割方法と計算精度について検討し、さらに、有限振幅波の解析法の不規則波に対する計算例や造波実験との比較を行って計算法の妥当性と適用性について検討する。

第2節 微小振幅波の解析法

(1) 基礎式

いま、流体は速度ポテンシャル ϕ を有し、波の運動はゆるやかで、かつ、水面変動量 η も小さく、波の線形理論が適用できる場合を対象とし、図-2.2.1に示すような任意の海底形状を有する2次元の領域での微小振幅波の運動について考える。

座標系は、静水面上に x 軸を取り、鉛直上向きに z 軸を取る。また、時間を t 、重力の加速度を g と表わす。解析領域 V 内での運動の支配方程式は次式で示される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots (2.2.1)$$

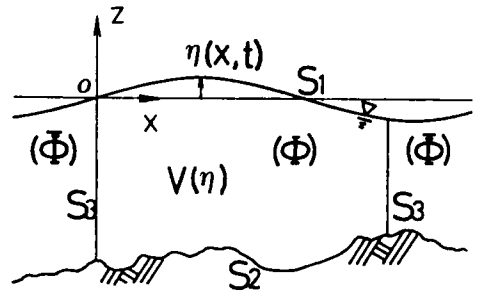


図-2.2.1 解析領域

微小振幅波の運動を取り扱う場合には、自由表面境界 S_1 を静水面と考える。この場合、解析領域 V は時間的に固定された領域となり、水面での力学的境界条件および運動学的境界条件の非線形項は省略されて、それぞれ次式で示される。

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots (2.2.3)$$

この両式から、 η を消去すると、結局、境界 S_1 での条件は速度ポテンシャル Φ を用いて次式で与えられる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \quad \dots\dots (2.2.4)$$

また、海底および構造物など不透過な境界 S_2 での条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots (2.2.5)$$

である。ここに、 n は境界外向き法線方向を意味する。

さらに、流体中に設けた仮想の左右両境界 S_3 での流速の条件として

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad \dots\dots (2.2.6)$$

とする。ここに、 $\bar{\Phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味する。この $\bar{\Phi}$ の表示および仮想境界 S_3 の取り扱い方法については、本節(4)で説明する。

(2) 変分原理

微小振幅波の解析は、固定領域 V 内で式 (2.2.1) の Laplace 方程式を満足し、式 (2.2.4) および式 (2.2.5) を自然境界条件とする境界値問題である。ここでは、さらに仮想境界での条件式 (2.2.6) を考慮して次式で示される汎関数 χ を提案し、Euler の変分則に基づく変分原理について示す。

$$\chi = \frac{1}{2} \iint_V \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz + \frac{1}{g} \int_{s_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \cdot \Phi dS_1 - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \cdot \Phi dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.2.7)$$

上式の第1変分をとると次式のようなのである。ただし、変分を受ける独立量は Φ のみであって、 $\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right)$ および $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)$ は変分をとるに際しては定数であるとみなす。

$$\begin{aligned} \delta \chi &= \iint_V \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta \Phi) \right\} dx dz \\ &\quad + \frac{1}{g} \int_{s_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \Phi dS_1 - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \cdot \delta \Phi dS_3 \\ &= \oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \delta \Phi dS - \iint_V \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \delta \Phi dx dz \quad \text{注1)} \\ &\quad + \frac{1}{g} \int_{s_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \Phi dS_1 - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \cdot \delta \Phi dS_3 \\ &= - \iint_V \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \delta \Phi dx dz + \int_{s_1} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right\} \delta \Phi dS_1 \quad \text{注2)} \\ &\quad + \int_{s_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_2 + \int_{s_3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \right\} \delta \Phi dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.2.8) \end{aligned}$$

注1) Gauss の発散定理を使用、また、 $\delta \Phi$ は

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$$

注2) 解析領域の形状は境界 S_1 , S_2 , S_3 であるから

$$\oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS = \int_{s_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_2 + \int_{s_3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_3$$

定義した汎関数 χ が極値をもつための必要条件は、式 (2.2.7) に対する Euler の方程式が成立することであり、これは、式 (2.2.8) で示す第 1 変分 $\delta \chi$ の変分量 $\delta \Phi$ に対する各項が 0 となることと等価である。すなわち、式 (2.2.7) の汎関数 χ を停留にする条件として、この境界値問題の基礎式および境界条件式のすべてが同時に得られる。また、この汎関数 χ には、式 (2.2.5) で示される不透過な境界 S_2 の条件に関する項が表われていないが、変分の結果、式 (2.2.8) で示されるように、この条件は満足されることが示される。一般に、変分原理を適用する際には、未知量 (Φ) についての近似関数はこのような境界条件 (自然境界条件) を満す必要はなく、変分原理によってこの条件が満足されているのである。これは、境界条件を満足する近似関数を見出すのが困難な場合には、特に有効な方法となる。以下には、この変分原理を用いる手法を示す。

(3) 有限要素法による定式化

解析領域 V を有限個の要素群に分割して、式 (2.2.7) で示される汎関数 χ の離散化を行う。分割に用いる要素は複数個の節点をもつ任意形状の多角形を用いることが可能であり、未知量 Φ は、1 つの要素内ではその節点数に等しい数だけの未定係数をもつ近似関数 (試行関数) で表現される。いま、式 (2.2.7) に対しても多節点の要素による高次の近似表現を行うことができるが、この式は、空間的には Φ に関する 1 階の微分式であるので、 Φ は要素内で最底 1 階の微分可能な表現であれば式は満足できる。

しかし、ここでは、計算の簡略化のために、低次の要素である三角形要素を用いるものとして解析領域 V を分割する。このとき、図 - 2.2.2 に示すように、1 つの要素 i, j, m 内の速度ポテンシャル Φ は、 x, z の 1 次式で近似され、その節点値 $\{\Phi\}^T = [\Phi_i, \Phi_j, \Phi_m]$ を用いて次式で示される。

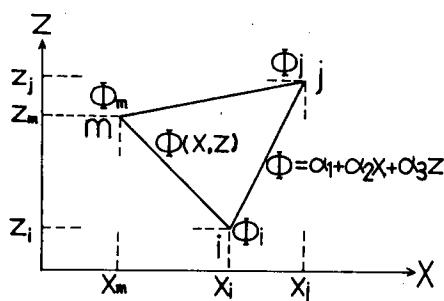


図 - 2.2.2 三角形要素

$$\Phi(x, z, t) = [N_i, N_j, N_m] \{\Phi\} = [N] \{\Phi\} \quad \dots\dots\dots (2.2.9)$$

ここに、

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i z)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j z)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_m &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m z) \\
 \left. \begin{aligned}
 a_i &= x_j z_m - x_m z_j \\
 b_i &= z_j - z_m \\
 c_i &= x_m - x_j
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i, j, m \text{ は} \\ \text{回転順列} \end{array} \\
 2\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta \text{は三角形} \\ \text{の面積} \end{array}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.10)$$

である。これを用いると、要素内の $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial z$ は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\Phi\} = \frac{1}{2\Delta} [b_i, b_j, b_m] \{\Phi\} = \mathbf{B}^T \{\Phi\} \\
 \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \{\Phi\} = \frac{1}{2\Delta} [c_i, c_j, c_m] \{\Phi\} = \mathbf{C}^T \{\Phi\}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (2.2.11)$$

となる。したがって、式(2.2.7)の右辺第1項は次のように表現される。

$$\frac{1}{2} \iint_V \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz = \frac{1}{2} \sum_V \{\Phi\}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{\Phi\} \cdot \Delta \dots\dots\dots (2.2.12)$$

ただし、 \sum_V は解析領域 V での総和を意味する。

次に、境界 S_1 について考える。

図-2.2.3 に示すような境界上での Φ および $(\partial^2\Phi/\partial t^2)$ は節点 i, j での値を用い

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi &= [N_i, N_j] \{\Phi\}_{ij} = [N_s] \{\Phi\}_{ij} \\
 \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \right) &= [N_i, N_j] \left\{ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \right\}_{ij}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.13)$$

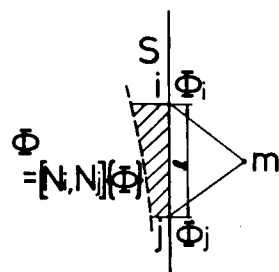


図-2.2.3 境界上積分

と表わすことにする。ここに $\{\Phi\}_{ij}^T = [\Phi_i, \Phi_j]$ などである。

$\{\}_{ij}$ のサフィックス は境界 ij での値であることが明白であるので以後、除くことにする。

したがって、式(2.2.7)の右辺第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g} \int_{s_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Phi dS_1 \\
&= \frac{1}{g} \sum_{s_1} \{ \Phi \}^T \int_e [N_i, N_j]^T [N_i, N_j] dS_1 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} = \frac{1}{g} \sum_{s_1} \{ \Phi \}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} \\
& \dots\dots\dots (2.2.14)
\end{aligned}$$

ここに、 $\int_e dS$ は1つの要素における積分を意味し、 \sum_{s_1} は境界 S_1 に関する総和を意味する。

またマトリックス \mathbf{S} は、

$$\mathbf{S} = \frac{l}{3} \begin{bmatrix} \overline{N_i^2}, & \frac{1}{2} \overline{N_i} \overline{N_j} \\ \frac{1}{2} \overline{N_i} \overline{N_j}, & \overline{N_j^2} \end{bmatrix}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\overline{N_i} &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x_i + c_i z_i) \\
\overline{N_j} &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x_j + c_j z_j), \quad l = \sqrt{b_m^2 + c_m^2}, \text{ 線分 } \overline{ij} \text{ の長さ} \quad \dots\dots\dots (2.2.15)
\end{aligned}$$

また、境界 S_3 上でも Φ および $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$ を節点 i, j での値を用いて表わすことにして、式(2.2.7)の右辺第3項を次のように表わす。

$$\int_{s_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi dS_3 = \sum_{s_3} \{ \Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.16)$$

かくして、式(2.2.7)の汎関数は次式のように有限個の節点値に離散化されて表現できる。

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{2} \sum_V \{ \Phi \}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{ \Phi \} \cdot \Delta + \frac{1}{g} \sum_{s_1} \{ \Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{s_3} \{ \Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} \\
& \dots\dots\dots (2.2.17)
\end{aligned}$$

これに、先に示した変分原理を用いて、まず第1変分を取ると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\delta \chi &= \sum_V \{ \delta \Phi \}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{ \Phi \} \cdot \Delta + \frac{1}{g} \sum_{s_1} \{ \delta \Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{s_3} \{ \delta \Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} \\
& \dots\dots\dots (2.2.18)
\end{aligned}$$

これを停留にする条件として

$$\sum_V (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{\Phi\} \Delta + \frac{1}{g} \sum_{s_1} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{s_3} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.19)$$

上式が解くべき連立方程式である。なお、水底など不透過な境界 S_2 に関する境界条件は変分原理で示したように、この式に含まれる。

ここで、いま入射波の振幅を a 、周波数を σ ($\sigma = 2\pi/T$, T は周期) として、周期的な波動の場合を考え、速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ を $\Phi = ga/\sigma \cdot \phi(x, z) \cdot e^{i\sigma t}$ とすると、この複素ポテンシャル関数 ϕ は領域内で Laplace の式を満足して、各境界条件は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 &= 0 \\ \text{境界 } S_1 : \partial \phi / \partial n &= \sigma^2 / g \cdot \phi \\ \text{境界 } S_2 : \partial \phi / \partial n &= 0 \\ \text{境界 } S_3 : \partial \phi / \partial n &= \partial \bar{\phi} / \partial n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.2.20)$$

ここで、 $\bar{\phi}$ は解析領域外部での複素ポテンシャル関数である。この ϕ を用いて式 (2.2.19) を表わすと次式ようになる。

$$\sum_V (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{\phi\} \cdot \Delta - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{s_1} \mathbf{S} \{\phi\} - \sum_{s_3} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.21)$$

解析に際しては式 (2.2.19) あるいは式 (2.2.21) で表現される連立方程式において、境界 S_3 上での節点で流速 $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}$ を与えてこれを解けば全節点での未知量 Φ が求まる。しかしながら、一般には、この境界 S_3 での波動は、反射波や通過波に関する未知量を含んでいる。次には仮想境界 S_3 を一般の開放された境界とする方法について述べる。

(4) 仮想境界の条件

流体中に設けた境界 S_3 は、数値解析上から領域を有限領域とするために設けた仮想の境界であり、この境界が開放されている場合は、この内外で流体は連続でなければならない。前節で述べたように、このような境界の取り扱い方法については微小振幅波の運動の場合に対して数種の方法が提案されている。ここでは、比較的取り扱いが簡単なポテンシャル接続法を利用した方法を示す。

いま、図-2.2.1 に示すような x の負の方向から波が入射する場合を考え、入射位置 ($x = x_i$) での水深を h_i とし、通過位置での水深を h_t とする。この場合、構造物等の周辺では、いわゆる定常波や散乱波等が発生するが、境界 S_3 をこれ等構造物の周辺から十分離れた位置に設けることによって、この種の波による影響を無視することができて、入射および通過の各位置での速度ポテンシャルを以下のように取り扱うことができる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{入射位置； } \bar{\Phi}_{inp} = \bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_r \\ \text{通過位置； } \bar{\Phi}_{out} = \bar{\Phi}_t \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.22)$$

ここに、 $\bar{\Phi}_i$ は入射波、 $\bar{\Phi}_r$ は反射波、 $\bar{\Phi}_t$ は通過波を表わす。 $\bar{\Phi}_{inp}$ および $\bar{\Phi}_{out}$ はそれぞれ入射および通過の位置でのそれを意味する。

これ等を微小振幅波による表現を行うと、それぞれ次のようになる。

$$\bar{\Phi}_{inp} = \frac{ga}{\sigma} \bar{\phi}_{inp} e^{i\sigma t} = \frac{ga}{\sigma} \cdot i \cdot (e^{-ik_i x_i} + A_r e^{ik_i x_i}) \frac{\cosh k_i (h_i + z)}{\cosh k_i h_i} e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (2.2.23)$$

$$\bar{\Phi}_{out} = \frac{ga}{\sigma} \bar{\phi}_{out} e^{i\sigma t} = \frac{ga}{\sigma} \cdot i \cdot A_t \cdot e^{-i \int k dx} \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\cosh k_t h_t} e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (2.2.24)$$

ここに、 k_i および k_t はそれぞれ入射および通過位置での波数 ($k = 2\pi/L$, L は波長) を表わす。 A_r は反射波を表わす未知の複素定数である。 A_t は通過波を表わす未知の複素定数であって、これをさらに $A_t^* = A_t e^{-i \int k dx}$ とすると、 A_t と A_t^* とは物理的な意味は変わらない。そこで、以後 A_t^* の * は除く事にする。上の両式を用いると、先の連立方程式 (2.2.21) 中の $(\partial \bar{\phi} / \partial n)$ は、 l_{x_i} 、 l_{x_t} を入射および通過位置での x 軸の外向き方向余弦として次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right)_{inp} = l_{x_i} \cdot k_i (e^{-ik_i x_i} - A_r e^{ik_i x_i}) \frac{\cosh k_i (h_i + z)}{\cosh k_i h_i} \quad \dots\dots\dots (2.2.25)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right)_{out} = l_{x_t} \cdot k_t A_t \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\cosh k_t h_t} \quad \dots\dots\dots (2.2.26)$$

この両式を用いて、解くべき連立方程式 (2.2.21) を表現すると、解析領域 V 内に設けられた全節点数 M に等しい数だけの連立方程式となるが、未知数は、この M 個の ϕ と A_r および A_t であって、結局 2 つの方程式が不足する。

そこで、これを補うために次式で示される速度ポテンシャルの連続条件を、それぞれ入射位置と通過位置の境界 S_3 上で考える。

$$\int_{s_3} \phi dS_3 = \int_{s_3} \bar{\phi} dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.2.27)$$

上式の左辺は、解析領域内部側での積分であって、図 - 2.2.3 と同様に、境界上での節点 i, j の値を用いて次式で示される。

$$\int_{s_3} \phi dS_3 = \sum_{s_3} \frac{l}{2} [\bar{N}_i, \bar{N}_j] \{\phi\} = \sum_{s_3} \bar{S} \{\phi\} \quad \dots\dots\dots (2.2.28)$$

また、右辺は、領域外部側での積分であるが、式(2.2.23)および式(2.2.24)の両式から、これを水底より静水面まで積分すれば、入射および通過位置でそれぞれ次式で示される。

$$\int_{s_3} \bar{\phi}_{inp} dS_3 = i (e^{-ik_i x_i} + A_r e^{ik_i x_i}) \frac{\tanh k_i h_i}{k_i} \quad \dots\dots\dots (2.2.29)$$

$$\int_{s_3} \bar{\phi}_{out} dS_3 = i A_t \frac{\tanh k_t h_t}{k_t} \quad \dots\dots\dots (2.2.30)$$

したがって、この両式と式(2.2.28)を等置して新たに2つの方程式が得られる。

結局、求める連立方程式群は次式で示される。

$$\begin{aligned} \sum_V (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{\phi\} \cdot \Delta - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{s_1} \mathbf{S} \{\phi\} \\ + D \sum_{s_3 - inp} \mathbf{S} \{\cosh k_i (h_i + z)\} \cdot A_r - E \sum_{s_3 - out} \mathbf{S} \{\cosh k_t (h_t + z)\} \cdot A_t \\ = D \sum_{s_3 - inp} \mathbf{S} \{\cosh k_i (h_i + z)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.2.31)$$

$$\sum_{s_3 - inp} \bar{\mathbf{S}} \{\phi\} - i \frac{e^{ik_i x_i} \cdot \tanh k_i h_i}{k_i} \cdot A_r = i \frac{\tanh k_i h_i}{k_i} e^{-ik_i x_i} \quad \dots\dots\dots (2.2.32)$$

$$\sum_{s_3 - out} \bar{\mathbf{S}} \{\phi\} - i \frac{\tanh k_t h_t}{k_t} \cdot A_t = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.33)$$

ここに、 $\sum_{s_3 - inp}$ および $\sum_{s_3 - out}$ は入射位置および通過位置での総和を意味する。また、式(2.2.31)

中の D および E の係数はそれぞれ次のようである。

$$\begin{aligned} D &= \frac{k_i l_{x_i} e^{ik_i x_i}}{\cosh k_i h_i} \\ E &= \frac{k_t \cdot l_{x_t}}{\cosh k_t h_t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.2.34)$$

以上、述べたように、計算に必要なデータは、式(2.2.25)および式(2.2.26)で表現されるように、仮想境界 S_3 での入射波に関する量と、反射波および通過波を規定する周波数 k_i および k_t のみであり、従来より行われてきた、Helmholty 型方程式の解法^{15), 16)}に見られるような、計算水深での周波数を規定することはなく、任意海底形状での波動を計算することができる。

また、ここでは、入射波を微小振幅波理論による $\bar{\phi}_i$ を用いて定式化しているが、波の入射方法は任

意であって、考える入射条件を、速度 $(\frac{\partial \Phi}{\partial n})_i$ の条件として与えればよい。すなわち、ここで示した計算方法は、波動場のみならず、流れが存在する場合など、広範な速度ポテンシャルを有する流体の微小な運動の数値計算法として利用できる。

この結果より、微小振幅波の解析により力学的諸量は次のようになる。

1) 反射率および通過率

反射率 K_r および通過率 K_t は式 (2.2.23) および式 (2.2.24) の意味から明らかなように

$$K_r = |A_r|, \quad K_t = |A_t| \quad \dots\dots\dots (2.2.35)$$

2) 表面波形; η

$$\eta/a = -i\phi(x, 0) e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (2.2.36)$$

3) 流体圧力; p

流体の密度を ρ として

$$p/\rho g a = i\phi(x, z) e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (2.2.37)$$

その他の諸量も速度ポテンシャルを用いて容易に求められる。

第3節 有限振幅波の解析法

ここでは、概節でも述べたように、速度ポテンシャル表示された非線形の波動の基礎方程式に対し、これに直接、変分原理を適用した有限要素法によって、任意の海底形状を有する浅海域での有限振幅の規則波および不規則波の運動を計算する方法について述べる。

(1) 基礎式

図-2.2.1に示すような $(x-z)$ 平面の2次元の領域での波の運動を考える。いま、波の有限振幅性を考慮するとき解析領域 V は水面変動量 $\eta(x, t)$ の関数であって、これを $V(\eta)$ と表示する。また、座標系および各解析境界は前節と同様に取りるものとする、速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ を有する波動の基礎式および境界条件式は以下のように示される。

$$\text{解析領域 } V(\eta) \text{ 内; } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3.1)$$

$$\text{自由表面境界 } S_1 \text{ 上; } \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.3.3)$$

ここで、 n は境界外向き法線方向を意味し、 n_z は n の z 軸方向余弦である。

$$\text{海底や構造物などの不透過な境界面 } S_2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3.4)$$

$$\text{流体中に設けた仮想の左右両境界 } S_3; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (2.3.5)$$

ここに、 $\bar{\Phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味する。この $\bar{\Phi}$ の表示および境界 S_3 での処理については、不規則波の場合を含めて本節(4)で説明している。

(2) 変分原理

変動する解析領域 $V(\eta)$ での波の運動は式(2.3.1)から式(2.3.4)で示される境界値問題であって、これは、変分原理によって支配されることがLuke¹⁷⁾によって示されている。ここでは、さらに、仮想境界 S_3 での条件式(2.3.5)を考慮して、ある時刻 t での汎関数 χ を次のように考える。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \iint_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz + \frac{g}{2} \int_{s_1} \eta^2 dx + \int_{s_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \eta dx \\ & - \int_{s_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Phi dx - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \Phi dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.3.6) \end{aligned}$$

変分を受ける独立量は Φ および η であって、第1項が η の関数となっている点が重要である。この変分を取ると以下ようになる。なお、変分を取るに際して、 $\partial \Phi / \partial t$ 、 $\partial \eta / \partial t$ および $\partial \bar{\Phi} / \partial n$ は定数であると見做される。

$$\begin{aligned} \delta \chi = & \iint_{V(\eta)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta \Phi) \right\} dx dz + \frac{1}{2} \int_{s_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz dx \\ & + \int_{s_1} g \eta \cdot \delta \eta dx + \int_{s_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \delta \eta dx - \int_{s_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \delta \Phi dx - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \delta \Phi dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.3.7) \end{aligned}$$

ここに、

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \equiv (\Phi)^\vee$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta \Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dt$$

$$\equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{\nabla}$$

$$\delta \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \equiv (\eta)^{\nabla} \quad \text{ここに } (\)^{\nabla} \text{ は変分を意味する。}$$

..... (2.3.8)

などである。

式 (2.3.7) の右辺第1項は部分積分を用いると

$$\begin{aligned} & \iint_{V(\eta)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta \Phi) \right\} dx dz \\ &= \iint_{V(\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta \Phi \right) \right\} dx dz - \iint_{V(\eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \delta \Phi dx dz \\ &= \oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi \cdot dS - \iint_{V(\eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \delta \Phi \cdot dx dz \end{aligned} \quad \text{..... (2.3.9)}$$

となる。また、式 (2.3.7) の右辺第2項および第5項は、それぞれ次式で表現できる。

$$\frac{1}{2} \int_{s_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz dx = \frac{1}{2} \int_{s_1} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot \delta \eta \quad \text{..... (2.3.10)}$$

$$\int_{s_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \delta \Phi dx = \int_{s_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \delta \Phi \cdot n_z dS_1 \quad \text{..... (2.3.11)}$$

これらの式 (2.3.9), 式 (2.3.10), 式 (2.3.11) を用いて式 (2.3.7) を書き改めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \chi = & - \iint_{V(\eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \cdot \delta \Phi dx dz + \int_{s_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g \eta \right] \delta \eta dx \\ & + \int_{s_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \delta \Phi dS_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_2 + \int_{s_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \delta \Phi dS_3 \end{aligned} \quad \text{..... (2.3.12)}$$

すなわち、前節の変分原理で述べたと同様、上式から、式 (2.3.6) で示した汎関数 χ を停留にする必要条件として、基礎式 (2.3.1) から式 (2.3.5) までの境界条件式がすべて同時に得られ、この境界値問題を解くことと、式 (2.3.6) で示す汎関数 χ を停留にすることは等価であることが示される。

(3) 有限要素法による定式化

任意の海底形状を有する浅海域での非定常な有限振幅波の運動は、式(2.3.6)の汎関数に対する変分問題として取り扱われる。これに、有限要素法を用いて直接、式の離散化を行う場合には、この汎関数 χ は時間の関数であるので、空間方向とともに時間方向についても試行関数を用いた離散化¹⁸⁾が行われる。しかしながら、いま対象としている解析領域 $V(\eta)$ が時間的に変動し、かつ、非線形の現象に対して、このような時間・空間方向への有限要素法による離散化を行うと、非常に複雑化した式を取り扱わねばならない。そこで、ここではある時刻 t で定義された式(2.3.6)の汎関数 χ に対して空間方向に有限要素法を適用して離散化を行い、時間方向には差分法を適用して定式化を行う。

a) 空間方向への離散化

前節(3)と同様に、解析領域 V を簡単のために三角形要素群に分割して、速度ポテンシャル Φ をその節点値 $\{\Phi\}$ で表わし再記すると、以下のようなものである。

$$\Phi(x, z, t) = [N]\{\Phi\} \quad \dots\dots\dots (2.3.13)$$

さらに、

$$\partial\Phi/\partial x = \mathbf{B}^T\{\Phi\} ; \quad \partial\Phi/\partial z = \mathbf{C}^T\{\Phi\} \quad \dots\dots\dots (2.3.14)$$

また、自由表面変動量 $\eta(x, t)$ は図-2.3.1に示すように、境界 S_1 の自由表面上節点 i, j 間で x の1次式で近似すると次式で示される。

$$\eta = [L_i, L_j]\{\eta\} = [L]\{\eta\} \quad \dots\dots\dots (2.3.15)$$

ここで、

$$\{\eta\}^T = \{\eta_i, \eta_j\}$$

$$L_i = \frac{1}{l}(x_j - x) ; \quad L_j = \frac{1}{l}(x - x_i)$$

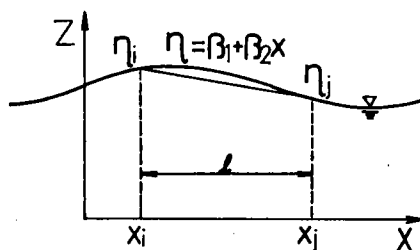


図-2.3.1 自由表面要素

l : 表面節点間距離の x 軸への写影長

$$\dots\dots\dots (2.3.16)$$

ところで、この場合の解析領域 $V(\eta)$ は独立な変関数 η の関数であり、上述の関係式をそのまま用いると、自由表面に関する要素の形状関数 $[N]$ の中に未知量 η が入って来てしまい非線形な多元連立方程式を解かねばならない。そこで、増分法を導入して、これの線形化を図る。

すなわち、ある時刻 t での第 n 近似解が既知であるとし、その第 $n+1$ 近似解を次のように表わす。

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + d\Phi$$

$$\eta^{n+1} = \eta^n + d\eta \quad \dots\dots\dots (2.3.17)$$

この第1近似解としては、時刻 $t - \Delta t$ (Δt は時間きざみ幅)での値を採用することができて、 Δt が小さく増分量 $d\Phi$ 、 $d\eta$ が十分小さい場合には、上式の関係は時間に関しても適用することができる。すなわち、時刻 t での Φ および η は、時刻 $t - \Delta t$ でのそれぞれの値 Φ_0 および η_0 と Δt 時間内の増分量 $d\Phi$ 、 $d\eta$ を用いて次式で示すことができる。

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi, \quad \eta = \eta_0 + d\eta \quad \dots\dots\dots (2.3.18)$$

計算に際しては、適当な間隔で式 (2.3.17) による解の収束を図り、通常の時間ステップに対して上式 (2.3.18) による逐時計算を進めればよい。

さて、このような増分法を用いると、自由表面要素について以下のようなになる。

図-2.3.2のように i, m の2節点が表面にある三角形要素の場合に、表面が $d\eta_i, d\eta_m$ だけ変動すると三角形 i, j, m の面積 Δ は、

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i^0 + d\eta_i \\ 1 & x_j & z_j^0 \\ 1 & x_m & z_m^0 + d\eta_m \end{vmatrix} \\ &= \Delta_0 + \frac{1}{2} [c_i, c_j, c_m] \{d\eta\} \\ &= \Delta_0 + \mathbf{P}^T \{d\eta\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.19)$$

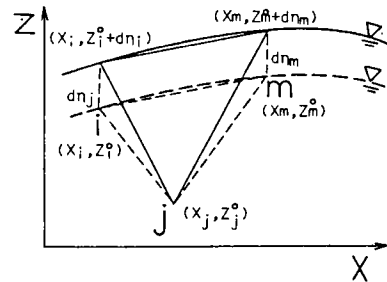


図-2.3.2 自由表面に接する三角形要素

ここで、 Δ_0 は時刻 $t = t_0$ での三角形の面積を意味し、

$$\{d\eta\}^T = [d\eta_i, 0, d\eta_m] \quad \dots\dots\dots (2.3.20)$$

である。そこで、この面積の変化を考慮して、式 (2.3.13)、式 (2.3.14) を書き改めると次のようになる。ただし、 $d\Phi$ 、 $d\eta$ の2次以上の項は無視している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= (\mathbf{B}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{B}_1^T) \{\Phi_0 + d\Phi\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (\mathbf{C}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{C}_1^T) \{\Phi_0 + d\Phi\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.21)$$

ここに、係数マトリックスは次式で示される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_0^T &= \frac{1}{2\Delta_0} [b_i^0, b_j^0, b_m^0] \quad (b_i^0 = z_j^0 - z_m^0, \quad b_j^0 = z_m^0 - z_i^0, \quad b_m^0 = z_i^0 - z_j^0) \\
 \mathbf{C}_0^T &= \frac{1}{2\Delta_0} [c_i, c_j, c_m] \\
 \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{2\Delta_0} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Delta_0} b_i^0 c_i, & 1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_i^0 c_j, & -1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_i^0 c_m \\ -1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_j^0 c_i, & -\frac{1}{2\Delta_0} b_j^0 c_j, & 1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_j^0 c_m \\ 1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_m^0 c_i, & -1 - \frac{1}{2\Delta_0} b_m^0 c_j, & -\frac{1}{2\Delta_0} b_m^0 c_m \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_1 &= \frac{-1}{(2\Delta_0)^2} \begin{bmatrix} c_i c_i, & c_i c_j, & c_i c_m \\ c_j c_i, & c_j c_j, & c_j c_m \\ c_m c_i, & c_m c_j, & c_m c_m \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.22}$$

また、 i 点のみが自由表面上にある場合は、以上の諸式で $d\eta_m$ を 0 とすればよい。

以上の関係式を用いて、式 (2.3.6) の汎関数は有限個の節点値で離散化でき次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{1}{2} \sum_V \{ \Phi_0 + d\Phi \}^T \left[(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \{ d\eta \}) (\mathbf{B}_0^T + \{ d\eta \}^T \mathbf{B}_1^T) \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \{ d\eta \}) (\mathbf{C}_0^T + \{ d\eta \}^T \mathbf{C}_1^T) \right] \{ \Phi_0 + d\Phi \} (\Delta_0 + \mathbf{P}^T \{ d\eta \}) \\
 &\quad + \frac{g}{2} \sum_{s_1} \{ \eta_0 + d\eta \}^T \mathbf{L} \{ \eta_0 + d\eta \} + \sum_{s_1} \{ \eta_0 + d\eta \}^T \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \\
 &\quad - \sum_{s_1} \{ \Phi_0 + d\Phi \}^T \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} - \sum_{s_3} \{ \Phi_0 + d\Phi \}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.23}$$

ここで、 \mathbf{L} は自由表面 S_1 上での積分項であって、

$$\mathbf{L} = \int_{\epsilon} [\mathbf{L}]^T [\mathbf{L}] dx = \frac{l}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{2.3.24}$$

である。また、 \mathbf{S} は、ここでは境界 S_3 上での積分項であり、前節の式 (2.2.15) で示してある。

$\sum_V, \sum_{s_1}, \sum_{s_3}$ はそれぞれ解析領域 V 、境界 S_1 および境界 S_3 に関する総和を意味する。

さて、式 (2.3.23) に対して、先の変分原理を適用し、未知な増分量 $d\Phi, d\eta$ に関する変分 $\delta\chi$ をとると、この $\delta\chi$ の停留条件として $d\Phi, d\eta$ に関する 2 組の連立方程式が得られ次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_V \left[(\mathbf{B}_0^T \Phi_0 \mathbf{I} + \mathbf{B}_0 \Phi_0^T) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{C}_0^T \Phi_0 \mathbf{I} + \mathbf{C}_0 \Phi_0^T) \mathbf{C}_1 \right] \Delta_0 + (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 \mathbf{P}^T \{d\eta\} \\ & + \sum_V (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Delta_0 \{d\Phi\} \\ & = - \sum_V (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 \Delta_0 + \sum_{s_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} + \sum_{s_3} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.25)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{V-s_1} \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \Phi_0^T \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_0 \Phi_0^T \mathbf{C}_1) + g \sum_{s_1} \mathbf{L} \right\} \{d\eta\} + \sum_{V-s_1} \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \{d\Phi\} \\ & = - \frac{1}{2} \sum_{V-s_1} \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 - g \sum_{s_1} \mathbf{L} \eta_0 - \sum_{s_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.26)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。また、 Φ_0, η_0 は、それぞれ、 $\Phi_0 = \{\Phi_0\}, \eta_0 = \{\eta_0\}$ である。 \sum_{V-s_1} は、自由表面要素に関する総和である。

b) 時間差分

式 (2.3.25)、式 (2.3.26) はある時刻 t において空間的に離散化された式である。ここでは、両式に含まれる時刻 t の自由表面上での状態量 $\left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\}$ および $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}$ について以下の差分法を適用して時間方向への両式の離散化を行う。

通常、時間差分を行うに際しては、対象とする方程式の全体系に対する時間きざみ Δt の間の関係として Crank - Nicholson 法や Lax - Wendroff 法などの差分法の適用が行われる。しかしながら、

式 (2.2.25) および式 (2.2.26) に対する全体系の差分は、表示式そのものが複雑化するのみならず、対象としている解析領域が時間的に変動し、これに伴う離散化誤差の評価問題および非線形方程式に対する差分の安定性の問題が本来含まれているので、ここでは、これらの取り扱いを簡単にするため $\partial \eta / \partial t, \partial \Phi / \partial t$ のみに対する時間差分を行う。

いま、時間きざみ Δt 間での増分量 $d\Phi = \Phi - \Phi_0$,

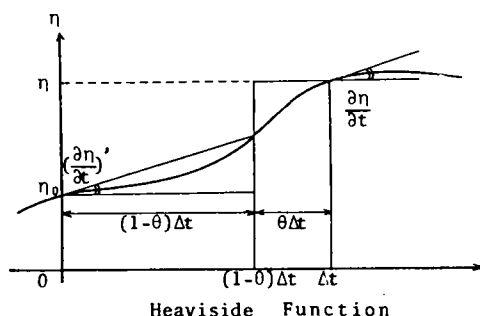


図 - 2.3.3 時間差分の重み

$d\eta = \eta - \eta_0$ を、図-2.3.3に示すような Heaviside 関数を内挿関数とした差分法を用い次式で表示する。

$$d\Phi = \Phi - \Phi_0 = \left\{ \theta \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 \right\} \cdot \Delta t$$

$$d\eta = \eta - \eta_0 = \left\{ \theta \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0 \right\} \cdot \Delta t \quad \dots\dots\dots (2.3.27)$$

θ は $0 \leq \theta \leq 1$ を満す定数

すなわち、

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} (\Phi - \Phi_0) - \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} (\eta - \eta_0) - \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0 \quad \dots\dots\dots (2.3.28)$$

として、この両式を式(2.3.25)および式(2.3.26)に用いる。

ここで、添字₀は、先に述べたと同様に、時刻 $t - \Delta t$ での値であることを意味している。また、 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0$ および $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0$ は自由表面境界 S_1 上での条件式(2.3.2)および式(2.3.3)に対する解の精度向上のために誤差補正を行った値であり、次式で計算する。

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 + E_d = - \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g \eta \right] \quad \dots\dots\dots (2.3.29)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0 + E_k = \frac{1}{n_z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (2.3.30)$$

ここに、 E_d および E_k は、それぞれの誤差補正項である。

計算の手順は、適当な初期条件と境界 S_3 に対する取り扱いの下で、式(2.3.28)を式(2.3.25)および式(2.3.26)に代入した連立方程式を解き、得られた結果から上式(2.3.29)、式(2.3.30)による誤差の補正を行って、これを次の計算ステップに用いる。これらから明らかなように、誤差の補正は時間に関して後退差分を用いている。なお、式(2.3.27)で示すような時間差分における重み θ の効果については、時間きざみ Δt とともに次節で検討する。

(4) 仮想境界の条件

解析上の仮想境界を考慮して、有限振幅波の過渡状態から定常状態までを計算する方法は、本法以外では、最近の井島³⁾によるフーリエ級数展開法が示されているに過ぎない。ここでは、仮想境界にお

ける解析領域内部と外部の流体運動の連続条件として、仮想境界面上において、mass-flux および energy-flux の連続性を計算の時刻ごとに満足させる方法を用いて、任意境界領域における不規則波を含む進行波の運動の解析方法を示す。

先述したように、空間および時間についての離散化手法を用いると、結局、式(2.3.25)により解析領域内の全節点数に等しい数の連立方程式と、式(2.3.26)により自由表面上の節点数に等しい数だけの連立方程式が得られる。したがって、もし、左右の仮想境界 S_3 での流速条件 $(\partial\bar{\Phi}/\partial n)$ が知れると、計算の初期条件を与えて解析を進めることができる。しかし、一般には解析領域外部の速度ポテンシャル $\bar{\Phi}$ は、反射波や通過波を含む未知量であって、解析的には、この $\bar{\Phi}$ に関する未知量の数だけの方程式の数が不足し、このままでは解析することができない。そこで、仮想境界 S_3 において、この $\bar{\Phi}$ は無数の成分の和として表現できるものと仮定し、これを波の進行方向ごとに、未知定数をもつ1つの波で代表させて近似表現し、これに対する取り扱いで容易に解析されることを示す。

図一2.2.1に示した解析領域で、 x 軸の負の方向から、周期、波高の異なる不規則な波が入射する場合を考える。仮想境界 S_3 は、前節と同様に構造物等による散乱波の影響を無視できる位置に設けるものとする。この仮想境界 S_3 において、任意時刻での流体運動の連続を考える場合、境界 S_3 上での不規則な波の速度ポテンシャル $\bar{\Phi}$ を想定することが必要であり、これを、次式のように無数の成分波の和として表現できるものと仮定する。

$$\begin{aligned} \text{入射位置； } \bar{\Phi}_{inp} &= \sum_l \bar{\Phi}_{il} + \sum_m \bar{\Phi}_{rm} \\ \text{通過位置； } \bar{\Phi}_{out} &= \sum_n \bar{\Phi}_{tn} \\ (l, m, n &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.31)$$

ここに、 $\bar{\Phi}_{il}$ 、 $\bar{\Phi}_{rm}$ 、 $\bar{\Phi}_{tn}$ はそれぞれ任意時刻での入射波、反射波および通過波の第 l 、 m 、 n 成分であり、次式で表現される。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{il} &= \frac{\sigma_{il}}{k_{il}} \frac{\cosh k_{il}(h_i + z)}{\sinh k_{il} h_i} \eta_{il} \\ \bar{\Phi}_{rm} &= - \frac{\sigma_{rm}}{k_{rm}} \frac{\cosh k_{rm}(h_i + z)}{\sinh k_{rm} h_i} \eta_{rm} \\ \bar{\Phi}_{tn} &= \frac{\sigma_{tn}}{k_{tn}} \frac{\cosh k_{tn}(h_t + z)}{\sinh k_{tn} h_t} \eta_{tn} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.32)$$

$$\eta_{il} = a_{in} \cdot \sin(k_{il} x - \sigma_{il} t + \varepsilon_{il})$$

$$\begin{aligned}\eta_{rm} &= a_{rm} \cdot \sin(k_{rm} x + \sigma_{rm} t + \varepsilon_{rm}) \\ \eta_{tn} &= a_{tn} \cdot \sin(k_{tn} x - \sigma_{tn} t + \varepsilon_{tn})\end{aligned}\quad \cdots \cdots (2.3.33)$$

ここで、 h_i 、 h_t はそれぞれ境界 S_3 の入射位置および通過位置での水深である。また、各成分波の角周波数 ($\sigma = 2\pi/T$; σ_{il} , σ_{rm} , σ_{tn}) および波数 ($\sigma = 2\pi/T$; σ_{il} , σ_{rm} , σ_{tn}) は、対応する各波について、分散関係式 $\sigma^2 = gk \tanh kh$ を満す。また、 a_{il} , a_{rm} , a_{tn} は各波の振幅であり、 ε_{il} , ε_{rm} , ε_{tn} は各波の位相差を意味しており、 η_{il} , η_{rm} , η_{tn} は各波の水面変動量による速度ポテンシャルへの関与項である。

さて、入射波 $\bar{\Phi}_{il}$ は既知量であるが、 $\bar{\Phi}_{rm}$, $\bar{\Phi}_{tn}$ は各成分ごとに未知量 η_{rm} , η_{tn} を持つ無限個の集合であり、このままでは解析することはできない。そこで、これを簡単に取り扱う方法として、波の進行方向ごとに、ある代表の成分波 $\bar{\Phi}_r$, $\bar{\Phi}_t$ を選び、これを用いて次式のように考える。

$$\begin{aligned}\sum_m \bar{\Phi}_{rm} &= \bar{\Phi}_r \sum_m (\bar{\Phi}_{rm} / \bar{\Phi}_r) \equiv \bar{\Phi}_r \cdot R_r \\ \sum_n \bar{\Phi}_{tn} &= \bar{\Phi}_t \sum_n (\bar{\Phi}_{tn} / \bar{\Phi}_t) \equiv \bar{\Phi}_t \cdot R_t\end{aligned}\quad \cdots \cdots (2.3.34)$$

R_r , R_t は、ある時刻での代表波と各成分波の総和との比を表わす。これに、式 (2.3.32) の表現を用いると反射波および通過波は次式で示される。

$$\begin{aligned}\sum_m \bar{\Phi}_{rm} &= \bar{\Phi}_r R_r = -\frac{\sigma_r}{k_r} \frac{\cosh k_r (h_i + z)}{\sinh k_r h_i} \eta_r R_r \equiv -\frac{\sigma_r}{k_r} \frac{\cosh k_r (h_i + z)}{\sinh k_r h_i} A_r \\ \sum_n \bar{\Phi}_{tn} &= \bar{\Phi}_t R_t = \frac{\sigma_t}{k_t} \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\sinh k_t h_t} \eta_t R_t \equiv \frac{\sigma_t}{k_t} \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\sinh k_t h_t} A_t \\ \eta_r &= a_r \sin(k_r x + \sigma_r t + \varepsilon_r) \\ \eta_t &= a_t \sin(k_t x - \sigma_t t + \varepsilon_t)\end{aligned}\quad \cdots \cdots (2.3.35)$$

ここに、 $A_r = \eta_r R_r$, $A_t = \eta_t R_t$ である。この A_r , A_t を反射および通過波に関する未知定数とすることによって、任意時刻で無限級数の和として表現される波を無限個の各成分波ごとに区別することなく、進行方向ごとに“総和された波”すなわち、入射波 $\bar{\Phi}_i$, 反射波 $\bar{\Phi}_r$, 通過波 $\bar{\Phi}_t$ の各代表波によって簡単に取り扱うものである。

この A_r , A_t は、上式から明らかなように、規則波（単一成分の波）の場合には、対応する水面変動量の速度ポテンシャルへの関与項（水面変動量は以下の式 (2.3.38) の A_r' , A_t' ）であるが、不規則波の場合には、このような物理的な意味は明確でなくなり、想定した代表波の速度ポテンシャル（図一

2.3.4 参照 図中の Φ_d と実速度ポテンシャルとの比(図-2.3.

4中の A_d)を意味すると解釈される。

上述したように、任意時刻における仮想境界上での進行方向ごとに“代表波”とした取り扱いは、解析上、単一波と多成分の波との区別はなく、進行する波の過渡的状态から定常状态まで、同一の簡単な方法で解析することができる。以下にこれを用いる手法を述べる。

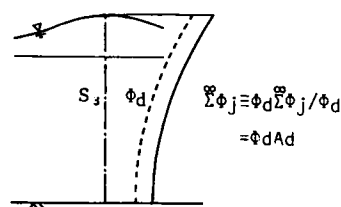


図-2.3.4 仮想境界

流体中に設けた左右の仮想境界 S_3 では、流体運動の連続条件として (a) mass-flux および (b) energy-flux の連続性が満足されねばならない。これらの条件に対して以下のように考える。

(a) mass-flux の連続性

$$\rho \int_{S_3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS_3 = \rho \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.3.36)$$

すなわち、境界 S_3 上の流速の連続条件より満足されるが、これは、すでに汎関数中に導入されてこの条件は満たされており、最終的には式(2.3.25)中の $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}$ を対応する節点ごとに与えればよい。そこで、式(2.3.35)を用いて $\partial \bar{\Phi} / \partial n$ を表現すると、入射側および通過側境界で次式のようなになる。ただし、境界 S_3 は z 軸に平行にとるものとする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right)_{inp} &= l_{x_i} \left(\sum_l \sigma_{il} \frac{\cosh k_{il} (h_i + z)}{\sinh k_{il} h_i} \eta'_{il} - \sigma_r \frac{\cosh k_r (h_i + z)}{\sinh k_r h_i} A'_r \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right)_{out} &= l_{x_t} \cdot \sigma_t \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\sinh k_t h_t} A'_t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.37)$$

$$\eta'_{il} = a_{il} \cos (k_{il} x - \sigma_{il} t + \varepsilon_{il}) \quad \dots\dots\dots (2.3.38)$$

$$A'_r = \eta'_r R_r = a_r \cos (k_r x + \sigma_r t + \varepsilon_r) \times R_r \quad \dots\dots\dots (2.3.39)$$

$$A'_t = \eta'_t R_t = a_t \cos (k_t x - \sigma_t t + \varepsilon_t) \times R_t \quad \dots\dots\dots (2.3.40)$$

ここに、 l_{x_i} 、 l_{x_t} はそれぞれ境界 S_3 の入射位置および通過位置での外向き法線の x 軸方向余弦である。 η'_{il} は入射波の成分波の表面変動量を表わす。 η'_{il} は既知であるが、 A'_r 、 A'_t は反射波および通過波に関する未知量である。

(b) energy-flux の連続性

仮想境界において、 A'_r 、 A'_t で表わされる未知量が存在し、この個数に等しい数だけの方程式が不

足する。そこで、これらの未知量を決定するための新たな条件として energy-flux ; $-\rho (\partial \Phi / \partial t) \cdot (\partial \Phi / \partial n)$ の連続を考えるが、ここで、mass-flux ; $\rho (\partial \Phi / \partial n)$ はすでに述べたように汎関数中に導入され式 (2.3.36) で考慮されているので、結局このことは、近似的に次式で表現できる。

$$\int_{s_3} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS_3 = \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right) dS_3 \quad \dots\dots\dots (2.3.41)$$

これを、入射および通過位置で考慮すると以下のようなのである。

(i) 内部領域

式 (2.3.41) の左辺は解析領域内部での積分項であり、 $\partial \Phi / \partial t$ は式 (2.2.28) にも示すように境界 S_3 上の節点値を用いて次式で表現される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [N_j, N_j] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = [N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.42)$$

(ii) 入射側境界

入射側の外部領域での $(\partial \bar{\Phi} / \partial t)$ は、式 (2.3.35) を用いると次式で表現される。

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_{inp} = - \sum_l \frac{(\sigma_{il})^2}{k_{il}} \frac{\cosh k_{il}(h_i + z)}{\sinh k_{il} h_i} \eta'_{il} - \frac{\sigma_r^2}{k_r} \frac{\cosh k_r(h_i + z)}{\sinh k_r h_i} A_r', \quad \dots\dots\dots (2.3.43)$$

これを用いて、式 (2.3.41) の積分を水底 $(-h_i)$ から自由表面の第 n 近似値 η^n まで行くと、入射側の仮想境界で次式が得られる。

$$\sum_{s_3-inp} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = - \sum_l \frac{(\sigma_{il})^2}{k_{il}^2} \frac{\sinh k_{il}(h_i + \eta^n)}{\sinh k_{il} h_i} \eta'_{il} - \frac{\sigma_r^2}{k_r^2} \frac{\sinh k_r(h_i + \eta^n)}{\sinh k_r h_i} A_r', \quad \dots\dots\dots (2.3.44)$$

(iii) 通過側境界

入射側境界と同様に式 (2.3.35) を用いると $(\partial \bar{\Phi} / \partial t)$ は次式で表現できる。

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_{out} = - \frac{\sigma_t^2}{k_t} \frac{\cosh k_t(h_t + z)}{\sinh k_t h_t} A_t', \quad \dots\dots\dots (2.3.45)$$

これを用いて、式 (2.3.41) の積分を水底から自由表面の第 n 近似値 η^n まで行くと、通過側境界では結局次式が得られる。

$$\sum_{s_3 - out} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = - \frac{\sigma_t^2}{k_t^2} \frac{\sinh k_t (h_t + \eta^n)}{\sinh k_t h_t} A_t' \quad \dots\dots\dots (2.3.46)$$

なお、式 (2.3.44) および式 (2.3.46) の左辺 $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}$ は、境界 S_3 上での解析領域内部の節点値であるが、この時間項については、先の式 (2.3.28) で示した差分を適用し、次式の表現を用いる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} (\Phi - \Phi_0) - \frac{1 - \theta}{\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 \quad \dots\dots\dots (2.3.47)$$

以上、仮想境界 S_3 での流体運動の連続条件式を考慮して、先の連立方程式群の式 (2.3.25) および式 (2.3.26) と連立させると、 $d\Phi$, $d\eta$, A_r , A_t を未知量とした多元連立方程式が得られる。したがって、これに適当な初期条件を与えると、考える入射波に対応した任意の境界形状および境界領域での有限振幅波の非定常な運動を求めることができる。

なお、仮想境界 S_3 が不透過な境界面の場合には $\partial\Phi/\partial n = 0$ であるから、当然ながら、この境界は S_2 境界として取り扱われ、上述の仮想境界での条件を考慮する必要はない。また、仮想境界での波の入射方法は、式 (2.3.37) で、入射波に対応する $(\partial\bar{\Phi}/\partial n)$ を与えればよく、造波板などによる波の入射を行う場合は、造波板の移動に対応して、この流速 $(\partial\bar{\Phi}/\partial n)$ を与えれば同様に計算することができる。

上述の結果から、各節点で求められた Φ , $\partial\Phi/\partial t$ の値を用いて、流体の流速、加速度、波圧の計算方法を示す。

1) 流速

水平および鉛直流速 u , w

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\Phi\} = \mathbf{B} \{\Phi\}$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \{\Phi\} = \mathbf{C} \{\Phi\} \quad \dots\dots\dots (2.3.48)$$

2) 加速度

水平および鉛直方向の加速度 α_x , α_z

$$\alpha_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u - u_0)$$

$$\alpha_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (w - w_0) \quad \dots\dots\dots (2.3.49)$$

3) 波力

流体の密度を ρ として、圧力方程式より、圧力 p は

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g z \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.50)$$

で計算できる。そこで、三角要素の重心 $G(x, z)$ を

$$\left. \begin{aligned} G(x, z) &= G(x_G, z_G) \\ x_G &= \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_m) \\ z_G &= \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_m) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.51)$$

とすると、

$$p = -\rho \left[[N(x_G, z_G)] \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\{(u)^2 + (w)^2\} + g z_G \right] \quad \dots\dots\dots (2.3.52)$$

ここに、 $N(x_G, z_G)$ は形状関数式 (2.2.9) の重心での値である。

さらに、構造物に作用する波圧を求めるには、図-2.3.5に示すように、構造物に接する三角形要素の i, j 面に沿って積分を実行すれば求められるから、この要素での合圧力を P^e とすると、次式で計算できる。

$$P^e = -\rho \left\{ \int_e \frac{\partial \phi}{\partial t} dS + \frac{1}{2} \int (u^2 + w^2) dS \right. \\ \left. + g \int_S z dS \right\}$$

$$= -\rho \left[\bar{S} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + \frac{l}{2} \left\{ (B\{\phi\})^2 + (C\{\phi\})^2 \right\} + g \bar{S}\{z\} \right] \quad \dots\dots\dots (2.3.53)$$

ここに、 $\bar{S} = \int [N_i, N_j] dS = \frac{l}{2} [\bar{N}_i, \bar{N}_j]$ であって、式 (2.2.28) に示したと同様に計算される。

また、 P^e の x および z 方向成分 P_x^e, P_z^e はそれぞれ次式で計算できる。

$$P_x^e = \frac{z_j - z_i}{l} P^e, \quad P_z^e = \frac{x_j - x_i}{l} P^e \quad \dots\dots\dots (2.3.54)$$

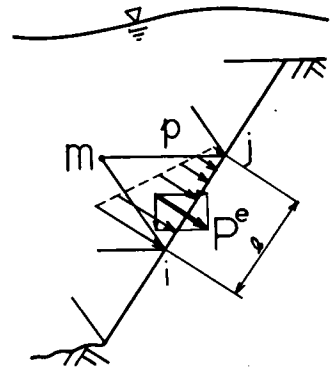


図-2.3.5 構造物に作用する波圧

なお、構造物に作用する全圧力 P は、次式で求められる。

$$P = \sum P^e \quad \dots\dots\dots (2.3.55)$$

第4節 計算精度の検討と適用計算例

任意海底形状の浅海域を進行する微小振幅波および有限振幅波の運動の解析に際して、本解析では、速度ポテンシャルで表現される波動の基礎方程式群を、直接、汎関数の停留問題として取り扱う変分法による解法を示して、より低次の微分方程式についての取り扱いで容易に定式化できることを述べた。有限要素法の適用に際しては、低次の三角形要素を採用して単純な計算式で定式化されることを示し、とくに、有限振幅波の解析は、非線形で非定常な問題となるが、これらの取り扱いについても、簡単な方法を導入して計算式が複雑化しないよう留意し定式化を行った。

ここでは、さらに、本解析法を有効に使用するために、要素の分割の方法と分割方法による計算精度の検討、および、時間差分の方法と解の性質についての検討を行う。また、一般的な波動場への適用および実験検証を行い、計算手法の有効性について検討する。

(1) 要素の分割方法と計算精度

計算領域を有限個の要素に分割して、有限要素法を用いると、各要素ごとに節点値で構成された係数行列が得られ、これを領域全体について総和をとると、各節点で結びつけられた系全体の行列式が作成される。

いま、解析領域を図-2.4.1に示すように三角形要素で分割し、その水深方向への分割数を N 、水平

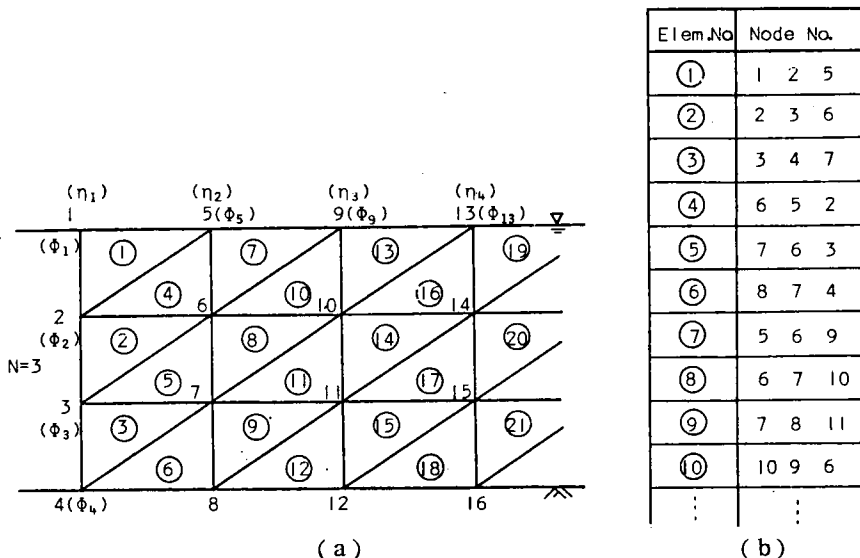
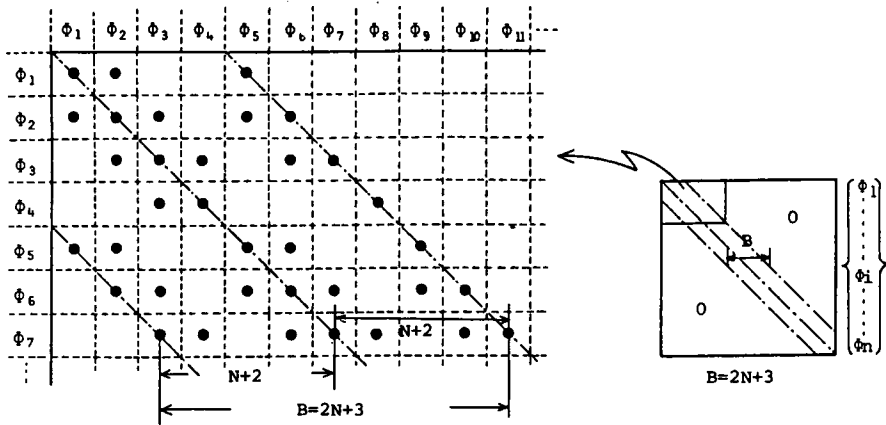


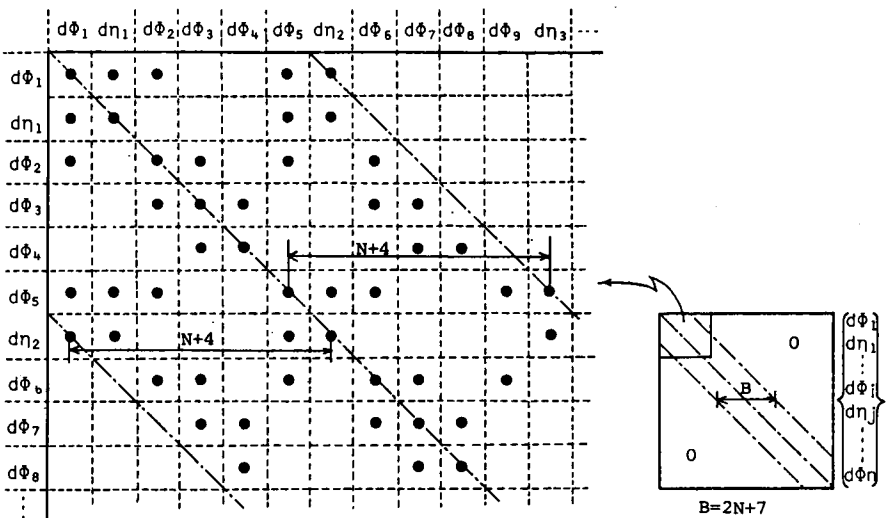
図-2.4.1 要素分割と節点番号

方向への分割数を M とする。図-2.4.1の(a)は、 $N=3$ として、その節点番号の付け方を、原点から水深方向に順に付すようにしている。このとき、各要素は(b)図で示される節点番号によって構成されることになる。この分割方法に従うと、式(2.221)の微小振幅波の場合の係数行列は、図-2.4.2(a)のように実係数が作られる。図中●印が実係数が存在する所であり、他は0である。これからも知れるように、この係数行列は行列の対角要素近くに集中し、主対角行列に対して最大バンド幅 $B = 2N + 3$ の中に分布することがわかる。

また、式(2.3.25)および式(2.3.26)で示される有限振幅波の連立方程式の場合には、図-2.4.2(b)



(a) 微小振幅波



(b) 有限振幅波

図-2.4.2 係数行列

のような実係数行列を作成する。すなわち、自由表面に関係する節点については、式 (2.3.25) と式 (2.3.26) の $d\Phi$, $d\eta$ の関係式を並置し、他の自由表面に関係しない内部の節点に関しては、式 (2.3.25) について行列式を作成する。これにより、全体系の係数行列は、主対角行列に対して $B = 2N + 7$ の中に分布する実係数行列を得ることができる。

なお、仮想境界 S_3 での新たな条件式、微小振幅波では、式 (2.2.32) と式 (2.2.33) および、有限振幅波動では、式 (2.3.44) と式 (2.3.46) の条件式を、それぞれ関係する境界 S_3 上節点の行列番号の近くに配置して考慮すればよく、このとき、バンド幅は主対角から片側に S_3 境界上の節点数の $(N + 1)$ と仮想境界に関する未知定数の合計 $(N + 1 + 1)$ であり、最大バンド幅は先の B 以下の値である。

一般に、有限要素法を用いた場合の係数行列は、隣接する節点以外は空行列となり、係数行列の大半は 0 であって、さらに、上述の節点番号の付し方および係数行列の並べ方を採用すると、実係数の分布するバンド幅を小さくすることができる。このことは、実計算に際して、各要素の分割および座標の決定などは、すべて計算機で自動的に行うことができ、各節点については隣接する節点に等しい個数だけの実係数を記憶すればよく、また、このバンド幅についての行列演算のみで連立方程式の解が求められ、計算機の記憶容量の縮小および計算時間の短縮上からも非常に有効となる。

さて、計算精度を検討するために、まず一定水深上を波が進行する場合を考え、これに対して本章の第 2 節で述べた微小振幅波の計算を行った。要素の分割数と計算精度の関係を示したのが図-2.4.3の (a), (b) である。

図-2.4.3 (a) は、入射波を $\sigma^2 h/g = 1.0$ として、水深方向の等分割数 N と、 x 軸方向の節点間隔 $\Delta x/L$ を変化して計算した時の水面波形の最大誤差 $|1 - \eta'|_{\max}$ をプロットしたものである。ここに、 $\eta' = \eta/a$ (a は入射波の振幅), L は入射波の波長である。これによると、 $\Delta x/L$ を小さくするほど、分割数 N を大きくとるほど精度は良くなり、 $\Delta x/L < 1/20$, $N > 8$ とするとこの場合の最大誤差は 1% 以下である。また、図中の破線は、各場合の三角形要素の形状 $\Delta x/\Delta z$ を連ねたものであるが、計算の精度に最も影響を及ぼすのは $\Delta x/L$ である。たとえば、 $\Delta x/L = 1/15$ とすると、 N を大きくしても最大誤差を 1% 以下にす

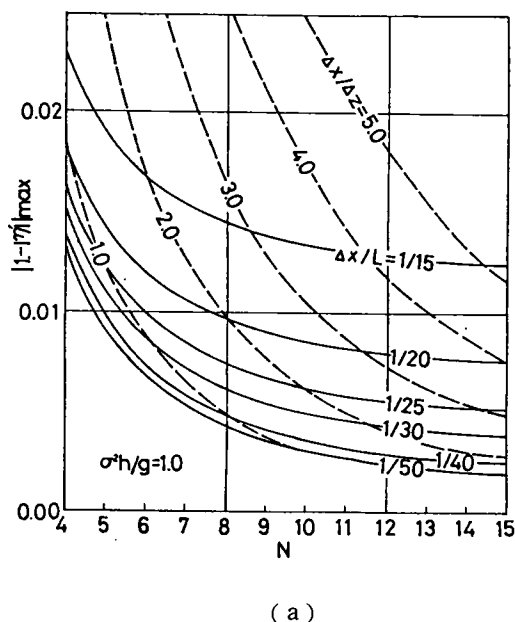


図-2.4.3 (a) 要素の分割と計算精度

ることは難しいことがわかる。

図-2.4.3(b)は、同図(a)の場合の $\Delta x/L = 1/40$ として、入射波を $\sigma^2 h/g = 0.1$ から 2.6 と変化させた時の同様の図である。これによると、 $\sigma^2 h/g$ が小さい時は精度は良くなることがわかる。すなわち、入射波の速度ポテンシャルの分布が水深方向に様となるに従って、この方向の分割数 N が少なくても高い精度の解を得ることができる。逆に、 $\sigma^2 h/g$ が大の場合には、ある程度以上の精度を得るためには N を大とする必要がある。また、 $\sigma^2 h/g$ が小さい時、例えば $\sigma^2 h/g = 0.1$ の場合、 N を大とすると逆に誤差が増加するが、これは図中にも示すように、三角形の形状が極端に扁平となるためであって、形状による誤差は、この程度の order で現われることがわかる。

この場合の、通過率 $|A_t|$ は 1.0、反射率 $|A_r|$ は 0 が厳密解であるが、これに関する誤差は最大で 10^{-3} 以下であり、仮想境界での処理方法が適当であることが検証される。なお、ここでの x 軸方向の分割数は $M = 30$ (節点数 31) として計算している。

(2) 時間差分の検討

本章第3節の有限振幅波の解析方法の(3)(b)で述べた時間差分の方法について、その時間きざみ $\Delta t/T$ と波動進行方向のきざみ $\Delta x/L$ および差分の重み θ との関係について検討を行い、これらによる解の性質について調べる。

式(2.3.27)のHeaviside関数を用いた差分式について、いま、時間微分項 $\frac{\partial}{\partial t}(\quad)$ ($\dot{\quad}$) と \cdot を付して表現すると

$$\phi = \phi_0 + \dot{\phi}_0 \Delta t + \theta (\ddot{\phi} - \dot{\phi}_0) \Delta t \quad \dots\dots\dots (2.4.1)$$

である。(添字 $_0$ は時刻 $t - \Delta t$ での量を意味している。) 一方 ϕ の時間に関する Taylor 展開は 2 次項

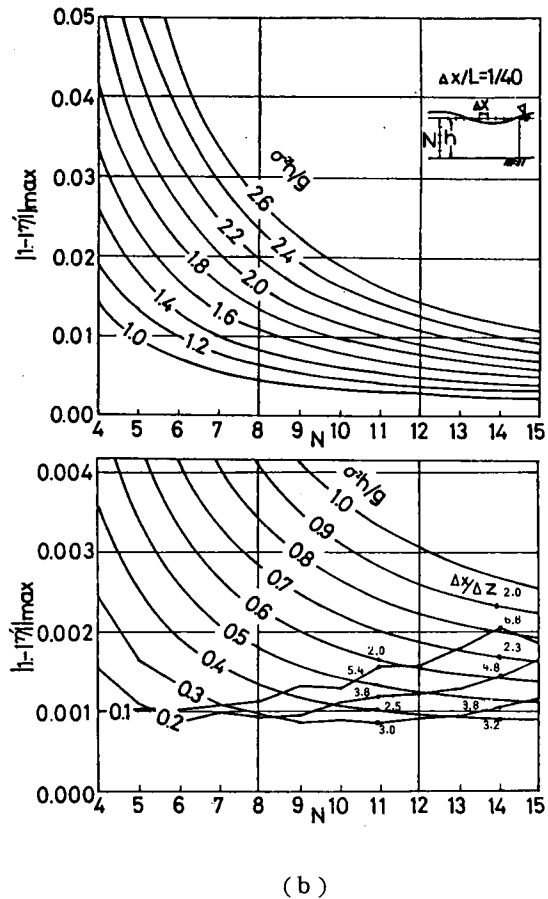


図-2.4.3 (b) 要素の分割と計算精度

まで示すと

$$\phi(t_0 + \Delta t) = \phi_0 + \dot{\phi}_0 \Delta t + \ddot{\phi}_0 \frac{\Delta t^2}{2} \quad \dots\dots\dots (2.4.2)$$

であり、これと式(2.4.1)との比較より

$$\phi = \frac{\Delta t}{2} \frac{\ddot{\phi}_0}{(\dot{\phi} - \dot{\phi}_0)} = \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}_0}{(\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) / \Delta t} \quad \dots\dots\dots (2.4.3)$$

が得られる。すなわち θ は時間に関する 1 階微分方程式の加速度補正項であり、1 階微分方程式における Newmark - β 法の係数 β と等価であることがわかる。

図-2.4.4 は、一様な水深上に、 $h/L_0 = 0.02$ ，沖波波形勾配 $H_0/L_0 = 0.004$ の波が入射する場合の有限振幅波の計算結果であり、時間差分の重み θ の影響を調べたものである。要素の分割は、水深方向に $N = 6$ 分割、 x 軸方向に $M = 120$ 分割して総節点数 847、 $\Delta x/L = 1/20$ 、 $\Delta t/T = 1/20$ としている。計算の初期値は微小振幅波の理論解を与え、これに入射境界から入射波に対応する微小振幅波の流速 $(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n})_i$ を各時間ステップごとに与えて計算を行い、時刻 $t/T = 2.5$ での水面波形 η/a_0 (a_0 は沖波の振幅)を示している。この図より、 $\theta = 0.5$ の場合が最も安定した波形が得られ、 $\theta = 0.5$ を中心として、 $\theta > 0.5$ の場合には、水面波形はしだいに減衰し、逆に $\theta < 0.5$ の場合には増大する傾向であることがわかる。また、 θ の値の変化によって、波形の位相のずれは生じていないことから、 θ は波形を増大あるいは減衰させる効果を持つものと判断される。

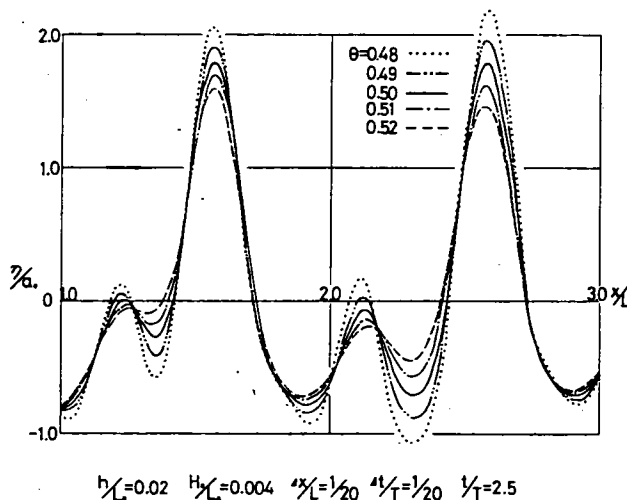
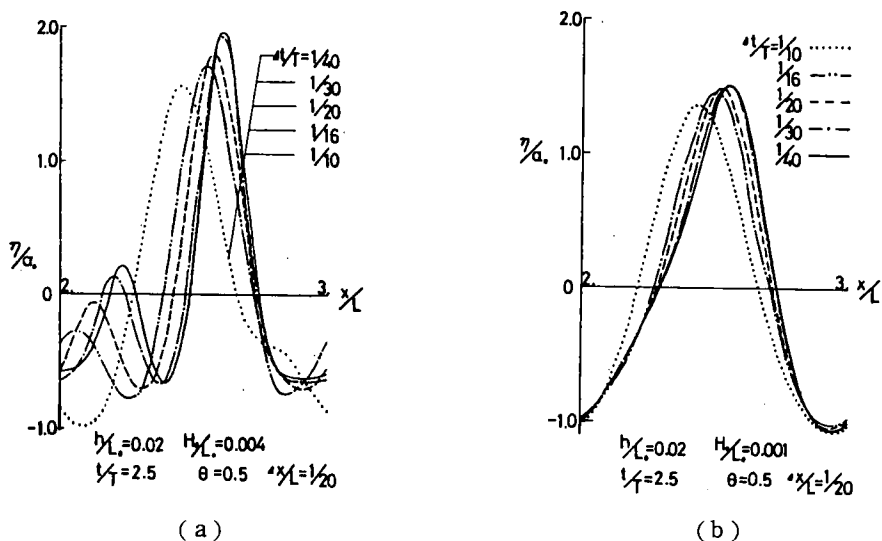


図-2.4.4 時間差分重みと空間波形



図－ 2.4.5 時間差分間隔と空間波形

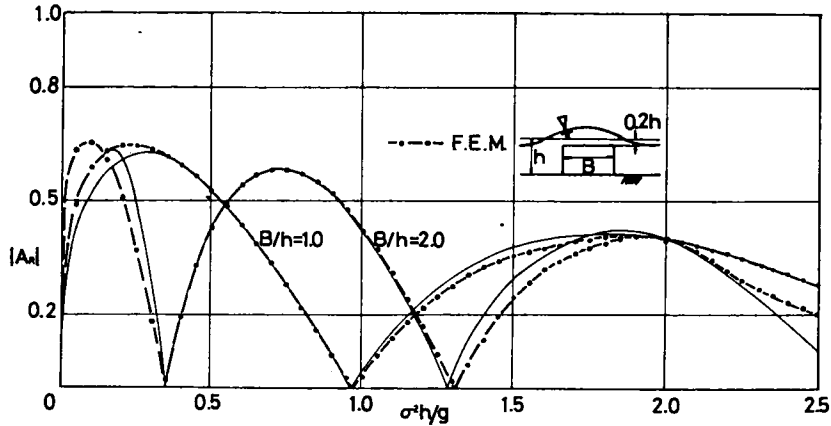
時間差分の重み θ は 0.5 とした場合が最も安定した解が得られることが示されたが、時間差分における時間きざみ $\Delta t/T$ について検討を行ったのが図－ 2.4.5 の(a),(b)両図である。一定水深上に、 $h/L_0 = 0.02$ の波が入射する場合について、 $\theta = 0.5$ とし、(a)図は $T_0/L_0 = 0.004$ 、(b)図は $T_0/L_0 = 0.001$ としている。要素の分割方法、計算の初期条件は図－ 2.4.4 の場合と同様である。図から、 $\Delta t/T$ の値によって、波形の位相に大きな差が生ずることが知られる。 $(\Delta t/\Delta x) \cdot L/T > 1$ の場合には、解は発散しないが、波形が他の場合に比較して著しく変化して得られ、実用上は、少なくとも $(\Delta t/\Delta x) \cdot L/T \leq 1$ 、すなわち、波動方程式に対する Courant - Friedrichs - Lewy の条件を満たす必要がある。

(3) 適用計算結果と考察

水深方向に 2 次元の波動場における有限要素法の計算に際して、要素の分割方法と計算の精度および時間差分についての検討を行ったが、ここでは、これらの結果を基に実的な浅海域での波動場に対する計算を行いその適用性について検討を加える。

a) 微小振幅波

図－ 2.4.6 は、微小振幅波の解析方法の検証のために計算した 1 例であって、図中に示す不透過潜堤の反射率を示したものである。要素の分割は、潜堤上で水深方向に $N = 4$ 、水平軸方向に 20 分割して、さらに潜堤の両側では、 $N = 10$ および水平方向に 30 分割とし、総節点数 777 である。計算は、入射波 $(\sigma^2 h/g)$ に対応する微小振幅波の速度ポテンシャル (式 (2.2.23)) を入力値として与えている。図中の実線は井島ら¹⁹⁾ 領域分割法によるもので、これと同様、反射率 $|A_r|$ が入射波によって変化する様子が計算され、仮想境界での取り扱い方法が妥当であり、本解析が有効であることが検証できる。



図－ 2.4.6 不透過潜堤の反射率

この場合の計算は複素数計算であるが、先に示した係数行列の作成手法を適用すると、1 節点に関する最大の記憶個数は、 A_r 、 A_r に関係する行であって、 $N + 1 + 1 = 12$ 個である。連立方程式の実計算も、実係数に関する直接解法を用いて容易に計算できる。すなわち、通常の、いわゆる full-matrix 演算では、この場合、 $(777 + 2) \times (777 + 2)$ の行列演算であるが、これに対して、ここでは $12 \times (777 + 2)$ の行列演算、すなわち、通常演算の (1 節点当りの最大の実係数) \div (全未知量) 倍の演算で解を求めることができる。

なお、この不透過な潜堤を含む消波構造物による波の変形特性に関しては、第 3 章 第 2 節で詳細に検討する。

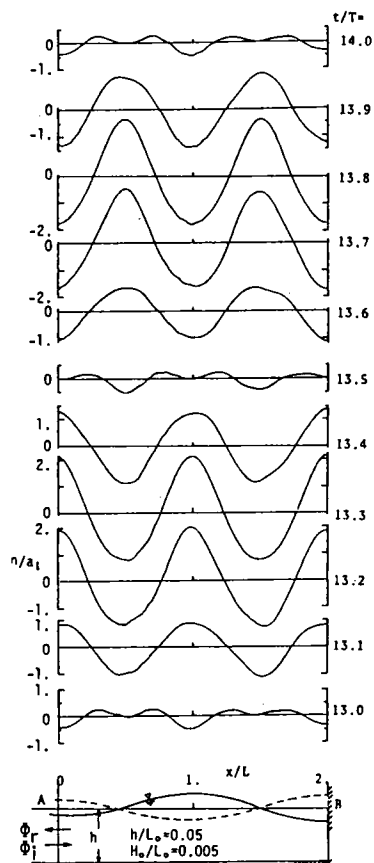
b) 有限振幅波

浅海域での波の運動を解析する場合、波動の有限振幅性（非線形性）に対する計算の精度が最も重要な点であるが、さらに、進行する有限振幅波の運動を解析の対象とする場合には、仮想境界において、この有限振幅波を無理なく“通過させる”ことが重要な問題となる。ここでは、この仮想境界での処理に対する検討を含めて、有限振幅波の重複運動、不規則な入射波による波の運動および造波装置による発生波の問題について計算例を示し、本解析法の検証と適用性について述べる。

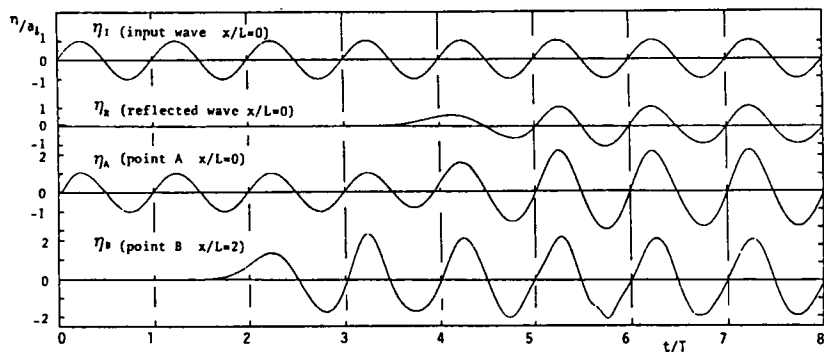
図－ 2.4.7 (a), (b) は、(a) 図中に示すように、一定水深上を進行する有限振幅波が鉛直壁によって反射し、重複波を形成する過程を計算したものであり、入射側の仮想境界 ($x/L = 0$) での入射波と反射波の分離に対する本解析法の検証を行ったものである。入射波の条件は、 $h/L_0 = 0.05$ 、 $H_0/L_0 = 0.005$ として、対応する微小振幅波の流速を入力した。要素分割は、水深方向に $N = 10$ 、 x 軸方向にきざみ間隔 $\Delta x/L = 1/40$ (L は入射波の波長) で 80 分割の 2 波長としている。また、時間差分の重み $\theta = 0.5$ で時間間隔 $\Delta t/T = 1/40$ とし、計算の初期値はすべての点で 0 とし、静水状態から定常状態になるまで計算を行っている。(a) 図は、十分に定常状態に達した時点での空間波形 η/a_i (a_i

は入射波の振幅)の1周期変化を図示したものである。これから、表面変動の全振幅 H は壁面 $x/L=2$ および $x/L=1.5, 1.0, 0.5, 0$ で最も大きく $H=2a_i$ であって、逆に $x/L=1.75, 1.25, 0.75, 0.25$ では振幅 H が小さく重複波理論の結果と一致する。

(b)図は、入射点 A ($x/L=0$) および壁面 B ($x/L=2$)での水面変動量 η/a_i の時間波形を計算の初期条件である静水状態まで示したものである。入射点および壁面での表面変動量 η_A, η_B が時間とともに増加して定常状態 $H=2a_i$ になる状況が計算されている。また、同図中の η_I は計算の入力データとした微小振幅波の水面変動量 η/a_i であり、 η_R は入射点 A での反射波の水面変動であって、計算された水面変動量 η_A から $\eta_R = \eta_A - \eta_I$ として求めたものである。時間の経過とともに定常状態となり、反射波 η_R も入射波 η_I の振幅に一致するようになり、壁面によって完全反射された波が入射位置において、無理なく通過していることが確かめられる。このように、



(a) 空間波形の時間変動



(b) 時間波形

図-2.4.7 有限振幅重複波

有限振幅波の過渡状態から定常に達するまで入射波と反射波の分離が良く計算され、入射位置での仮想境界に対する本計算法が有効であることが検証される。

図-2.4.8, 図-2.4.9 および図-2.4.10は多成分入射波による波動の計算を行って、本解析法の不規則波動問題への適用性を検討したものである。計算の対象とした海洋波浪のパワースペクトルは、有義波高 $H_{1/3}$ および周期 $T_{1/3}$ (図中では、これら深海の値として $H_{1/3} \equiv H_{m0}$, $T_{1/3} \equiv T_{m0}$, 対応する波長

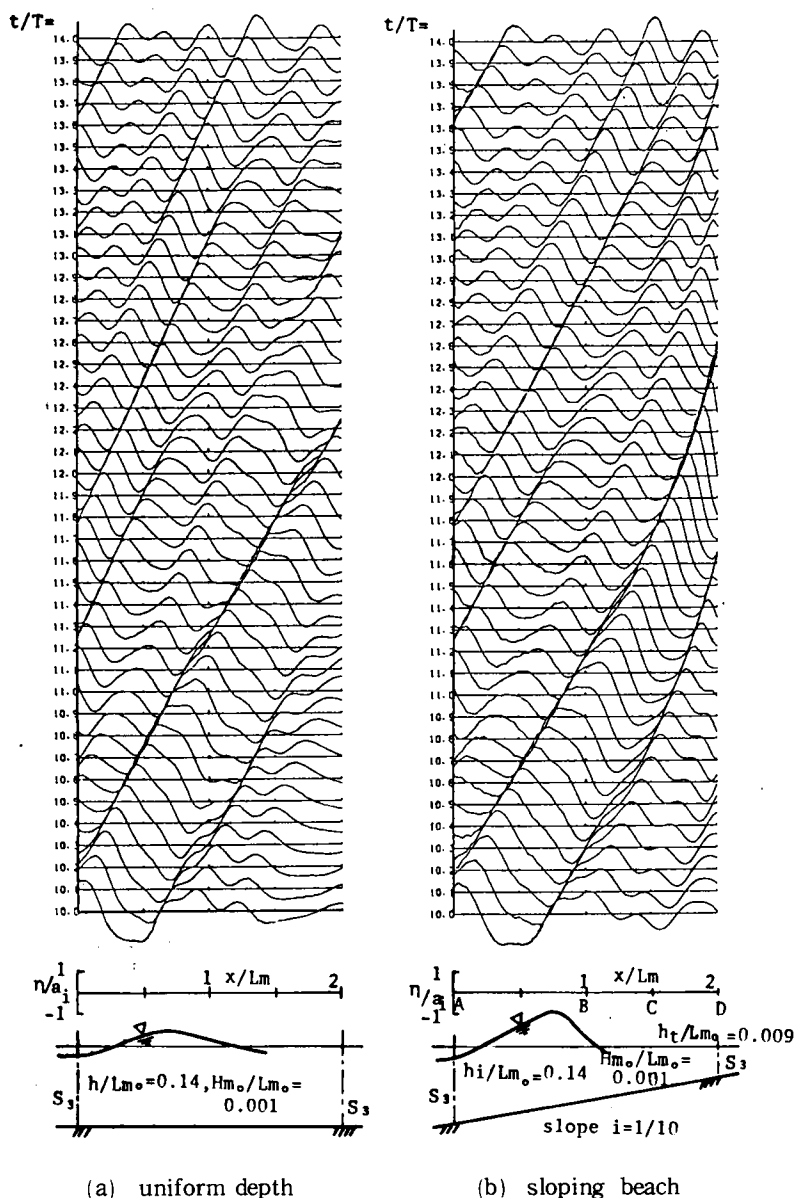
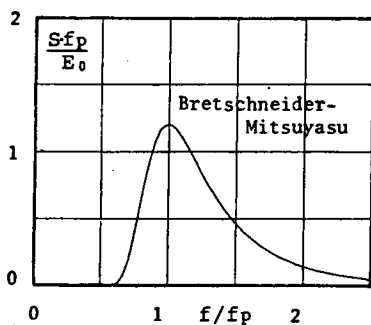
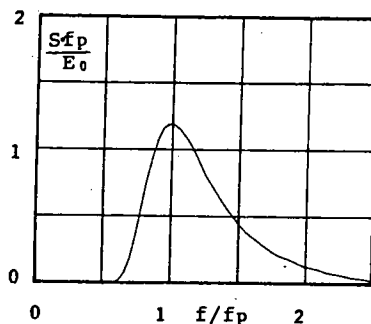


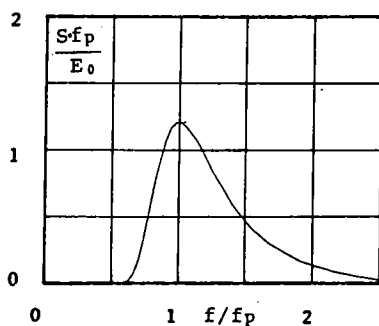
図-2.4.8 多成分波動の時間・空間波形



(a) $x/L_m=0$ (input point)

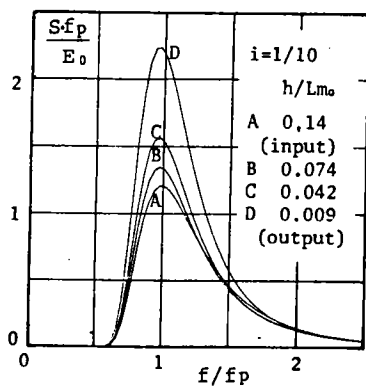


(b) $x/L_m=L_m$

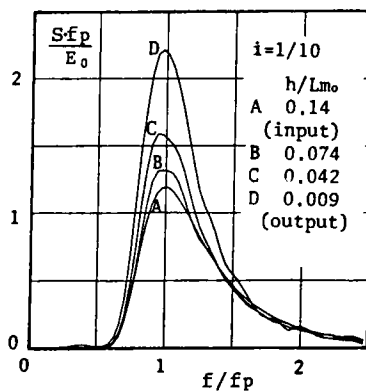


(c) $x/L_m=2L_m$ (output point)

図-2.4.9 一様水深上での多成分波浪のパワースペクトル



(a) small amplitude waves



(b) finite amplitude waves
(F. E. M.)

図-2.4.10 傾斜面での多成分波浪のパワースペクトル

を L_{m0} としている。) で表現された Bretschneider - 光易型スペクトル²⁰⁾ で次式で示される。

$$S(f) = 0.258 \left(\frac{H_K}{g(T_K)^2} \right)^2 \cdot g \cdot f^{-5} \cdot \exp(-1.03 (T_K \cdot f)^{-4}) \quad \dots\dots\dots (2.4.4)$$

ここに、 f は周波数、 g は重力加速度であって、さらに、有義波高および周期はスペクトルの全エネルギー E_0 、ピーク周波数 f_p と次の関係で示される。

$$H_K = 4.0 \sqrt{E_0}, \quad T_K = 1 / (1.05 f_p) \quad \dots\dots\dots (2.4.5)$$

$$E_0 = \int_0^\infty S(f) df = \bar{\eta}^2 \quad \dots\dots\dots (2.4.6)$$

上式のスペクトルを有義波に対する入射条件 $h/L_{m0} = 0.14$, $H_{m0}/L_{m0} = 0.001$ ($L_{m0} = g \cdot T_K^2 / 2\pi$) として、周波数 $0.25 f_p < f < 3.0 f_p$ の区間を $\Delta f = 0.05 f_p$ きざみに分割した。これらの周波数に対応する各成分波を決定し、一様乱数による位相差を与えて、式 (2.3.37) で示した多成分の波の入射を行い計算したものである。なお、各成分の波は入射位置の水深ですでに浅水変形しているので、これは微小振幅波理論の浅水係数 K_s

$$K_s = \sqrt{\frac{1}{2n} \tanh kh}, \quad n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad \dots\dots\dots (2.4.7)$$

を用いて各振幅を補正した。また、式 (2.3.37) 中の通過する波の代表波としては、入射する有義波の周期に等しい周期を持ち、通過位置の水深 h_i に対応する波数 k_i 周波数 σ_i の波、すなわち $\sigma_i^2 = gk_i \tanh k_i h_i$ ($\sigma_i = 2\pi / T_K$) の関係を満足する波とした。

このような、多成分の波が入射する場合について、その空間波形の時間変動を示したのが図-2.4.8 (a), (b) 両図である。図中に示すように、(a) 図は一様水深、(b) 図は(a)図の場合と同じ波群が斜面勾配 $1/10$ 上を進行する場合である。要素分割は、水深方向に6分割、 x 軸方向に $\Delta x / L_m = 1/30$ (L_m は入射位置水深 h_i に対応する有義波の波長) として、60分割の2波長の領域とし、 $\Delta t / T_K = 1/40$, $\theta = 0.5$ である。図で示されるように、水面波形は不規則な波群となって進行する状況が計算され、(a) 図の一様水深の場合における短波長の成分波は、(b) 図の傾斜面上では、その進行とともに波長、波高のより大きな波に吸収され水面波形は比較的なめらかに整形された形となって進行する傾向がうかがえる。これは、一様水深場よりも斜面を進行する波群の自互干渉を含む各波間の干渉が大であることを意味するものと思われる。

図-2.4.9、図-2.4.10の各図は、この計算結果から得られる水面波形のデータ（各水面点について1400個とした。）をもとに、これを高速フーリエ交換 ($F \cdot F \cdot T$) して求めたパワースペクトル $S(f)$ の無次元表示 $S(f) \cdot f_p / E_0$ (E_0 は式 (2.4.6) で計算される深海での値) を示している。

図-2.4.9は、図-2.4.8(a)の一樣水深の場合であり、それぞれ $x/L_m = 0$ （入射位置）、 $x/L_m = L_m$ および $x/L_m = 2L_m$ （通過位置）である。計算の入射位置における水面変動スペクトルの周波数分布は、計算の入力値である Bretschneider - 光易型スペクトルによるものと一致し、また、他の(b), (c)図で示す各位置での分布もこれとほぼ完全に一致する。すなわち、一樣水深上におけるこの波浪スペクトルの一致は、波が計算領域内で変形することなく進行し、仮想境界で反射もせずに通過していることを意味するものであり、これから、このような不規則な波に対しても仮想境界での処理方法を含み本解析法が有効であることが検証できる。

図-2.4.10は、図-2.4.8(b)の傾斜面上の各点A, B, C, Dにおける同様の水面変動スペクトルの図である。(a)図は分割した各成分波に先に述べた式(2.4.7)の微小振幅波理論による浅水係数 K_s を用いて、各成分波の振幅を補正して求めた各水深点でのスペクトルである。(b)図は、本解析法による計算結果である。浅水化に伴って波高が増加し、 $\bar{\eta}^2$ が大となる様子が計算されている。

これから、従来より求められていなかった有限振幅性を考慮した不規則な波浪の変形問題に対しても本解析法が十分有効であることが示される。

本法の有限振幅波の波動解析の計算精度とその適用範囲を検討するために、ピストン型造波装置による一樣水深での波の発生実験を行って、その水面変動について計算結果と比較したのが図-2.4.11の各図である。また、図-2.4.12の各図には、このときの計算による空間波形を時刻ごとに示している。

実験は、熊本大学工学部水理実験室の造波水槽（幅1m、高さ1m、長さ36m）を用いた。実験の水深 h 、周期 T およびピストンの移動振幅 ξ を変化させて、発生する波の種類が広範なものとなるようにした。実験ケースを表-2.4.1に示す。各ケースにおいて、測定点に関する波長 L は、一樣水深 h と周期 T に対応する微小振幅波理論の分散関係式 $\sigma^2 h / g = kh \tanh kh$ 、（ $\sigma = 2\pi/T$, $k = 2\pi/L$ ）により、あらかじめ求めた。

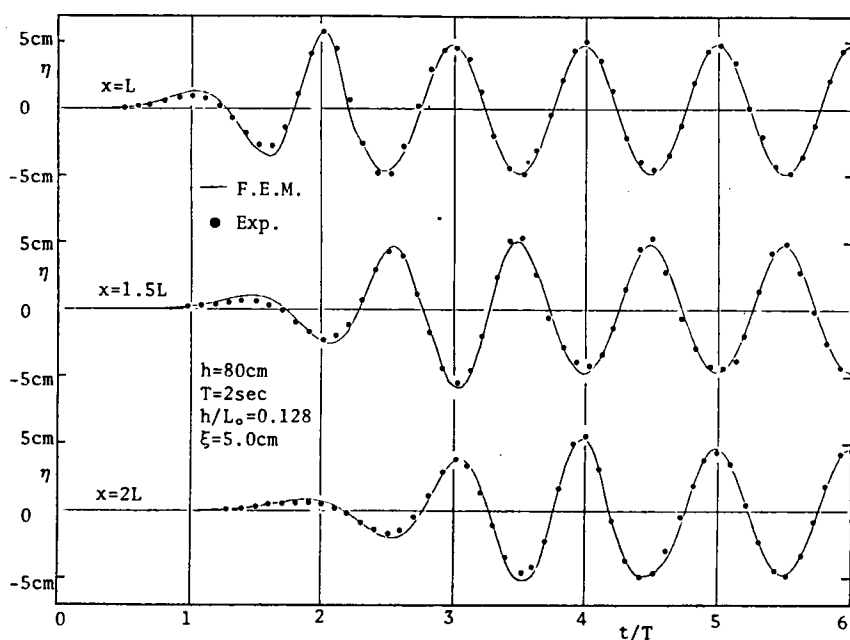
表-2.4.1 実験条件

実験ケース	水深 hcm	周期 T sec	Piston全振幅 2ξcm	測 点	相対水深 h/L ₀	波 高 Hcm (1.5L点)
Case 1	80	2.0	10.0	L, 1.5L, 2L	0.128	9.7
Case 2	60	2.5	19.0	L, 1.5L, 2L	0.0615	12.7
Case 3	40	4.1	34.0	0.5L, L, 1.5L	0.0152	14.3
Case 4	30	4.7	42.0	0.5L, L, 1.5L	0.0087	15.5

数値計算に際しては、実験を完全にシミュレートできるように、計算の入力方法および計算領域を決める。すなわち、波の入力方法は、ピストン移動振幅 ξ を測定し、これによる入射波の波速（ $\partial\Phi/\partial n$ ） $= (\partial\xi_t/\partial t)$ を式(2.337)に従って与え、また、造波板の位置も $\xi_t = \xi \sin\sigma t$ として各位相ごとに移動させる方法を用いた。また、計算の初期値としては、実験と同様、静水であるとして、すべての

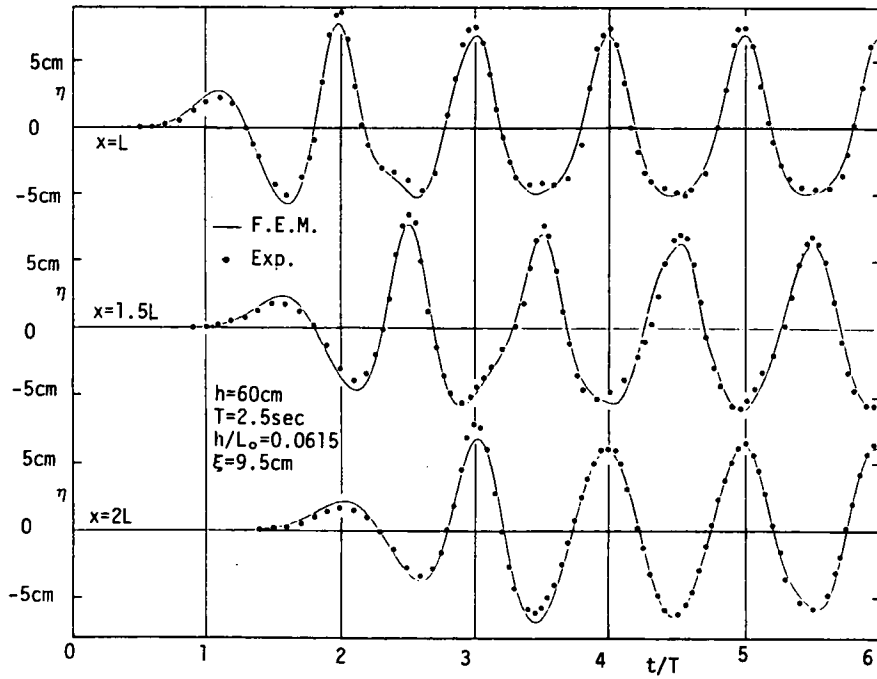
点で0を与え、造波板の位置 $\xi_i = 0$ の状態から計算を開始した。要素の分割は、各ケースとも水深方向に10分割、 x 軸方向には、Case 1およびCase 2の場合 $\Delta x/L = 1/20$ として、40分割の2波長区間、また、Case 3およびCase 4の場合には $\Delta x/L = 1/40$ の60分割で1.5波長の区間を取った。すなわち、各ケースの実験区間と同一となるように決めて、通過側での仮想境界の処理に関する本計算手法の検討を行えるようにした。なお、時間差分に関しては、すでに検討しており、ここでは、各ケースとも $\theta = 0.5$ 、 $\Delta t/T = 1/40$ として計算した。

図-2.4.11の(a), (b), (c), (d)の各図に示すように、Case 1の正弦的な水面波形からCase 4のソリトン発生状態まで本計算結果は実験結果と極めて良く一致し、本計算手法が十分な精度で水面変動を計算できることが実証できた。Case 1およびCase 2の正弦波的波動では、ほぼ完全に波形および波高とも計算できている。また、Case 3からCase 4の非線形的な波動に対しても、ソリトン波形がよく実験と一致して計算されることがわかる。このCase 3、Case 4の場合には、 $x = L$ 、 $1.5L$ の測定点で波峰の最大値が多少小さく計算されているが、これは、図からも知れるように、ソリトンの発生するような場合に対して、 x 方向のきざみ $\Delta x/L$ の値が多少大き過ぎると水面の曲率を十分に表現できないためであって、 $\Delta x/L$ および $\Delta t/T$ を小さくすることによって、さらに高精度の解を得ることが可能である。

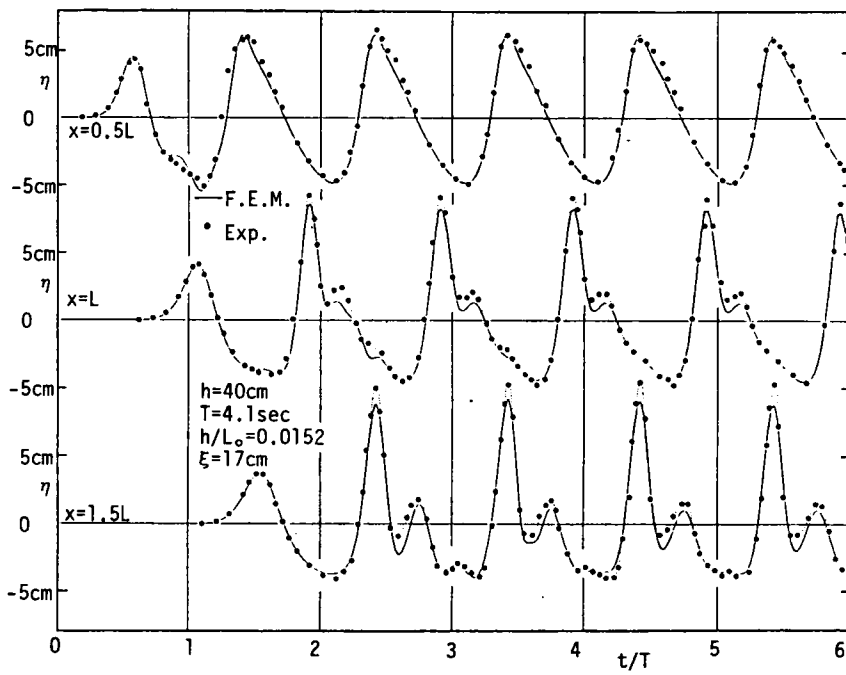


(a) Case 1

図-2.4.11 (a) ピストン型造波による波の発生

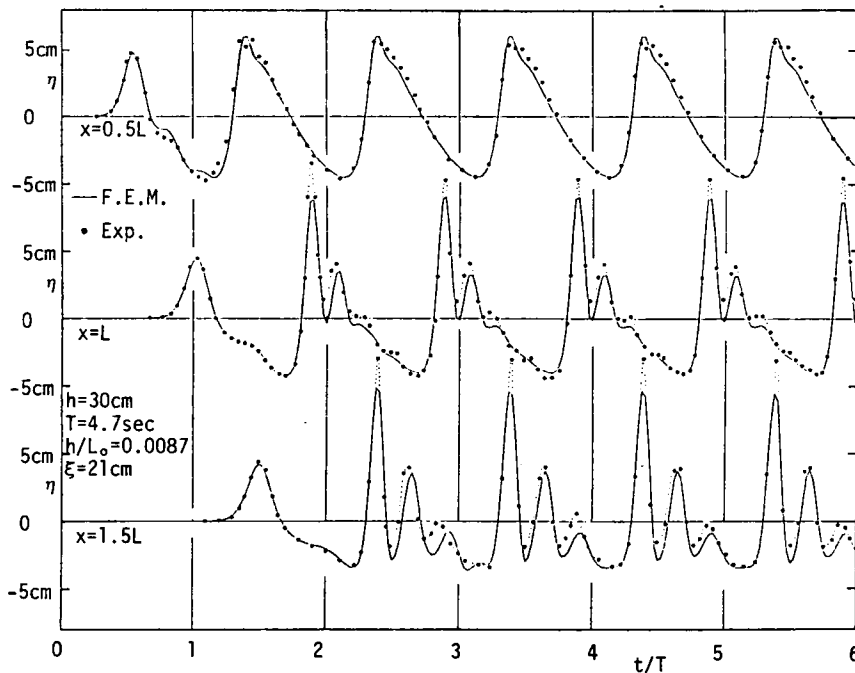


(b) Case 2



(c) Case 3

図-2.4.11 (b), (c)ピストン型造波による波の発生



(d) Case 4

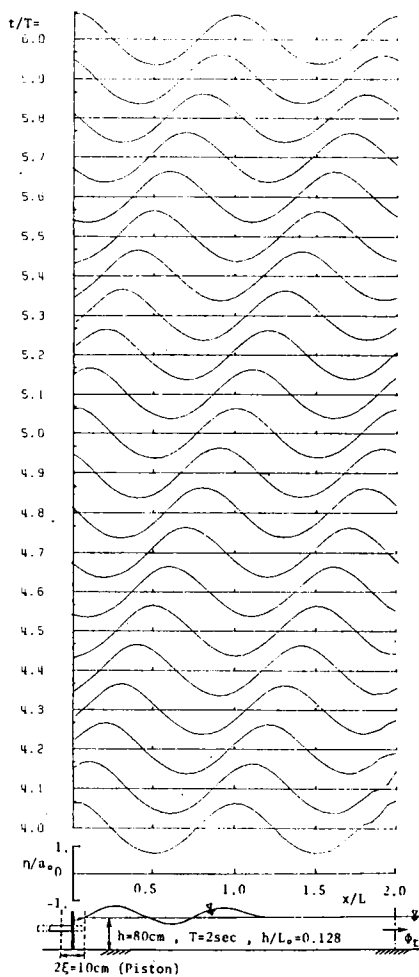
2.4.11 (d) ピストン型造波による波の発生

図-2.4.12の(a), (b), (c), (d)の各図は、各ケースの空間波形の時間変動を計算結果により示したものである。なお、図中の水面変動量 η/a_0 の a_0 は、ピストン型造波装置による発生波の振幅であって、Biesel²¹⁾ らによる微小振幅波理論によって次式で示される値である。

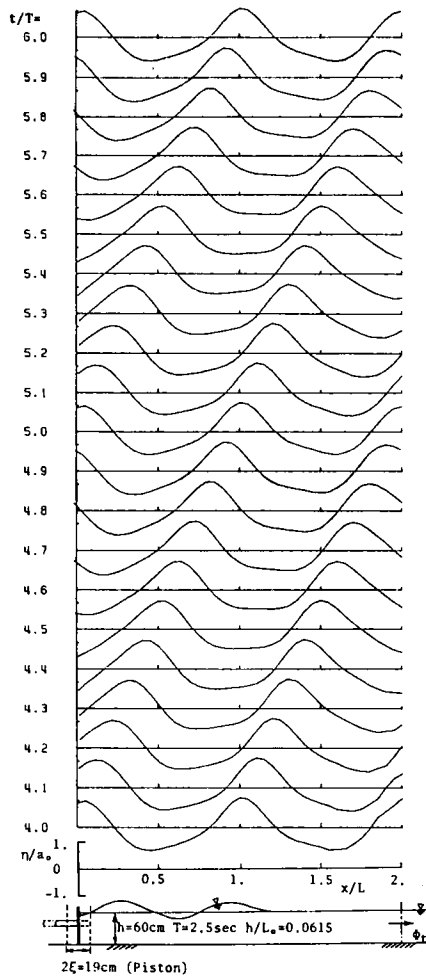
$$a_0 = \xi \cdot (4 \sinh^2 kh) / (\sinh 2kh + 2kh) \quad \dots\dots\dots (2.4.8)$$

これらの図から、造波板の移動に対応した波の発生と伝播の状況が示され、とくに、Case 3 および Case 4 の場合には、ソリトンが発生して、それが主峯と異なる波速で伝播する様子が良く計算できている。

通過位置での仮想境界の処理も、これらの図から明らかなように、通過部でなめらかに波が通過していることが示され、また、先の図-2.4.11の各通過位置での実験波形との比較からも、本計算法の妥当



(a) Case 1

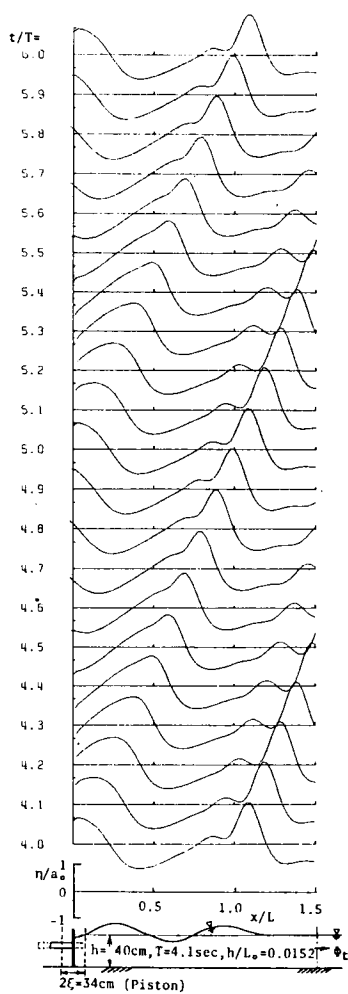


(b) Case 2

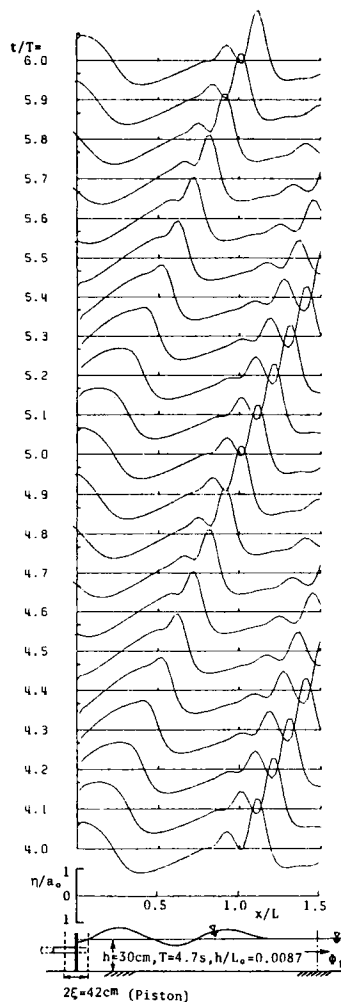
図－2.4.12 (a), (b)ピストン型造波による空間波形の時間変動

性を実証することができる。

本解析方法の適用範囲を検討するために、従来の一様水深場に対する定形波理論と比較して、上述の造波実験の範囲を示すと図－2.4.13 のようである。図中●印が表－2.4.1 で示した各実験ケースの、 $x = 1.5 L$ 測定での実験波高 H を用いて計算されたプロット点である。一様水深場での波高および波形に



(c) Case 3



(d) Case 4

図－2.4.12 (c), (d)ピストン型造波による空間波型の時間変動

関する各定形波理論の適用範囲については、水理公式集²²⁾にも示されているが、微小振幅波理論の適用範囲は、

$$HL^2/h^3 \leq 2.63, \quad H/L < 0.008 \quad \dots\dots (2.4.9)$$

で示される。また、Iversen²³⁾が緩傾斜面上での波高変化の実験より求めた微小振幅波理論の適用範囲は、

たっていることが示され、実験と良い一致を示す本解析法の適用範囲が、微小な振幅の波から、図中*印の“伝達にともない変形する波”の範囲まで十分広範に適用し得ることがわかる。

さらに、本解析法の限界は、その基礎理論であるポテンシャル Φ の存在が仮定できる限界近傍まで適用可能であると考えることができ、波の極限の状態である砕波現象に対する本解析法の適用を行って、砕波変形の機構に関する詳細を第4章で検討している。

第5節 結 語

本章では、任意の海底形状など、一般的な状況での浅海波の運動を、有限要素法を用いて解析する方法を示して、その検証と適用性について検討した。

まず、概説において、波動問題の有限要素法による従来の解析法について述べるとともに、それらの不十分な点を指摘して、本解析法の基本的な取り扱いの方法と本章の内容について略述した。

第2節および第3節では、水深方向に2次元の任意境界領域での速度ポテンシャルを有する微小振幅波および有限振幅波の運動に対し、仮想境界を考慮し、また、定式化に際しては式が複雑化しないよう留意した取り扱いを行って、平易な手法で計算する方法を詳述した。

第4節では、本解析法を適用した計算例を示して、計算精度および適用性について検討を行った。まず、要素の分割方法について述べ、解くべき連立方程式の大きさが必要以上とならないような分割方法を示し、要素の分割状況による計算精度について調べ、本解析法を有効に利用するための方法について述べた。ついで、微小振幅波および有限振幅波に対する検証計算を示し、とくに、有限振幅波の解析は、非定常・非線形な波動問題であるため、解析手法の検証は詳細に行った。すなわち、時間差分における時間きざみ $\Delta t / T$ と空間きざみ幅 $\Delta x / L$ の影響、さらには、時間差分の重み θ との相互の関係について調べ、解におよぼすこれらの効果を明らかにした。仮想境界の処理方法については、規則波に対して反射および通過波の計算例を示し、さらに不規則な入射波による波動の計算例を示して、その妥当性を検証することができた。また、造波実験を行って、これに対応するシミュレート計算との比較をし、計算の精度および適用範囲について検討した。この結果、本数値計算手法は、微小な振幅の波動の範囲から、ソリトンが発生するような非線形性の強い有限振幅波の運動までの広範囲な波動について、その波形を十分な精度で計算できることが実証できた。

なお、井島ら³⁾は、Green 公式を用いて任意境界形状領域での有限振幅波の運動を解析する方法を示しているが、これは、ラプラス式を満足する流体内部の速度ポテンシャルを、Greenの定理を用いて周辺境界上の積分方程式におきかえ、これに境界条件を満足するよう解を求める方法であり、水面での非線形な条件に対しては、これに摂動法を適用した線形化を行って解析している。したがって、解析領域の周辺境界上の節点で取り扱うことができるが、解くべき連立方程式の大きさはこれらの節点数について、いわゆる full - matrix となり、2次元問題では、本章の第4節で考察したように本法の band - matrix となる場合の方がむしろ小さくてすむ。また、非線形な水面条件の線形化に際しての摂動法の

適用は高次の展開に対して實際上多大の労力を要し、複雑な式を用いなければならず、波動の有限振幅性が顕著な場合の適用性について問題があると思われる。これに対して、本計算法では、すでに述べたように、非線形式の線形化に際しては、増分法の導入を行い、かつ他の定式化においてもできるだけが複雑化しないように留意した。この結果、十分な精度で有限振幅波の運動を計算し得ることが実証され、これからも本計算法のよい実用性を示すことができた。

以上、これらの結果より、本解析法は、任意境界形状および任意境界領域で、不規則波を含む浅海波動のシミュレーション手法として十分有効であることが検証でき、広範な波動問題の解明に有効に利用できることが示された。

参 考 文 献

- 1) Amein, M. : A method for determining the behavior of long waves climbing a sloping beach, Jour. Geophysical Res., Vol. 71, No. 2, pp. 401-410, Jan., 1966.
- 2) Chan, R. K. C. and R. L. Street : Shoaling of finite - amplitude waves on plane beaches, Proc. of the 12th Conf. on Coastal Eng., pp. 345-361, 1970.
- 3) 井島武士・永田修一 : 水中物体の非定常および定常有限振幅運動の解析, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 416-420, 1981.
- 4) Taylor, C., B. S. Patil and O. C. Zienkiewicz : Harbour oscillation, a numerical treatment for undamped natural modes, Proc. ICE, Vol. 43, p. 141, 1969.
- 5) Berkhoff, J. C. W. : Computation of combined refraction - diffraction, Proc. of the 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 471-490, 1972.
- 6) Bai, K. J. : A variational method in potential flows with a free surface, Rep. No. NA 72-2, Univ. of California, Berkeley, Sept. 1972.
- 7) 坂井藤一・河合三四郎 : 波動解析への有限要素法の適用, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 393-396, 1973.
- 8) 坂井藤一・月岡康一 : 波動解析への有限要素法の適用 (第2報) — 湾水振動の解析 —, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 45-48, 1974.
- 9) 坂井藤一・月岡康一 : 波動解析への有限要素法の適用 (第3報) — 地形および構造物による波の散乱について —, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 97-101, 1975.
- 10) 松田健志・岩崎敏夫 : 有限要素法による長波の変形の解析, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 93-96, 1975.

- 11) Zienkiewicz, O. C., O. W. Kelly and P. Bettess : The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, I. J. N. M. E., Vol. 11, pp. 355-375, 1977.
- 12) Bettess, P. and O. C. Zienkiewicz : Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, I. J. N. M. E., Vol. 11, pp. 1271-1290, 1977.
- 13) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題とその応用，1971年度水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会。
- 14) 井島武士・吉田明徳・山本督夫：任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形，土木学会論文報告集，第272号，1978。
- 15) 坂井藤一・河合三四郎：開水路における波動の有限要素法解析，土木学会論文報告集，第239号，1975。
- 16) Lee, J. J. : Wave induced oscillation in harbors of arbitrary geometry, Jour. Fluid Mech., Vol. 45, Part 2, pp. 375-394, 1971.
- 17) Luke, J. C. : A variational principle for a fluid with a free surface, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, Part 2, pp. 395-397, 1967.
- 18) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集，第220号，pp. 39-51, 1973。
- 19) 井島武士・佐々木富雄：潜堤の効果に関する理論的研究，第18回海岸工学講演会論文集，pp. 141-147, 1971。
- 20) 光易恒：海洋波のスペクトル構造，1976年度水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会。
- 21) Biesel, F. and F. Suquet : Laboratory wave - generating apparatus, (Translation of a Series of French Articles from La Houille Blanche by Stramb, G. L.) 1954.
- 22) 水理公式集，土木学会，昭和46年改訂版。
- 23) Iversen, H. W. : Waves and breakers in shallow water, Proc. of the 3rd Conf. on Coastal Eng., pp. 1-12, 1952.
- 24) Wilson, B. W., L. M. Webb and J. A. Hendrickson : The nature of tsunami, their generation and dispersion in water of finite depth, N. E. S. C., Rep. No. SN57-2, 1957.
- 25) Yamada, H. and T. Shiotani : On the highest water waves of permanent type, Bulletin the Disaster Prevention Res. Inst. Kyoto Univ., Vol. 18, Part 2, No. 135, pp. 1-22, 1968.

第 3 章 有限要素法解析による波と構造物の相互作用に関する研究

第 1 節 概 説

近年の海洋開発のめざましい進展に伴って、沿岸海域を対象とした多種多様な沿岸構造物の設置および計画が進められるようになり、これら構造物による波の変形や構造物に作用する流体力など波と構造物の相互作用問題の解明は、構造物による波の制御効果あるいは構造物そのものの安全性の確保など、海岸防災上および保全上から重要な課題である。

このような浅海域での波と構造物との相互作用による波の変形あるいは波の制御効果などを調べるとき、直面する困難な問題は、海底形状や構造物形状などの境界形状の複雑な場合や、構造物が透過性の構造を有する場合である。本章では、このような浅海域での波と構造物との相互作用問題に対して、2次元境界値問題としての有限要素法の適用を示し、これの適用計算によって潜堤による消波特性および波と浮体との相互運動特性について検討する。

第2節では、潜堤をとりあげ、その消波効果について調べる。まず、一般的な浅海域に設置され、任意の形状および異なる構成材より形成される透過性構造物の場合に対して、波圧を連続関数とした取り扱いによって、有限要素法を用いて容易に解析できる方法を示す。ついで、最近注目されている離岸潜堤として数種のモデルを示し、これに対する適用計算を行って、それらの消波機構について考察する。

第3節では、波と浮体との相互運動問題を取りあげ、相互の運動が微小振幅運動および有限振幅運動の各場合に対して、有限要素法による解析方法を示す。ついで、浮体強制運動による波の発生および波による浮体の運動について、相互運動の有限振幅効果による特性を実験および数値計算結果をもとに検討する。

第 2 節 潜堤の消波特性に関する研究

潜堤の消波効果に関する研究は、比較的多く行われている^{1), 2)}。これらは砕波による消波効果を期待した実験的研究が主で、従来は浅い水域に設置することを想定したものが多いが、最近大水深域での潜堤に関する研究も行われるようになった^{3), 4)}。理論的研究としては、ポテンシャル接続法を不透過潜堤に適用した井島・佐々木(1971)の研究⁵⁾、同じく透過潜堤について調べた井島・田淵他(1972)の研究⁶⁾がある。

しかしながら、複雑な海底形状や構造物形状の場合には、ポテンシャル接続法などの解析的取り扱いは困難であって、数値計算によらざるを得ないが、一般的な状況での構造物の消波効果を解析し得る計算方法としては、井島ら^{7), 8)}による Green の公式を用いた方法が示されているにすぎない。

本節では、まず、任意の海底形状の浅海域に設置された任意形状および異なる構成材より成る透過性

構造物に対して、有限要素法を用いて、その消波効果を容易に解析できる方法を示し、続いて、数種の離岸潜堤に本数値計算手法を適用して、その消波特性を考察する。

(1) 有限要素法による透過性領域を含む波動場の解析法

一般に存在する透過性の防波堤や護岸などは、不規則な海底形状の海浜に設置され、また、複雑な形状を有する場合が多い。このような、一般的状況での透過性構造物による波の変形やその消波効果を理論的に調べる場合、たとえ、波動が微小でかつ透過層内の流体抵抗が線形であるとしても、純理論的解析は困難であり数値解析による以外はない。

しかしながら、この問題の重要性にもかかわらず、数値解析による研究が非常に少なく、わずかに McCorguodale⁹⁾ が傾斜海岸の捨石護岸問題に対し有限要素法による解析を試み、また、井島ら^{7), 8)} の Green の公式を応用した解析が行われているにすぎない。前者は、層内の流れを非ダルシー則とした非定常解析を行っているが一般的な結果を得るには至っていない。後者は、透過層内の流体抵抗を流速に比例するとし、速度ポテンシャルによって表現される線形の運動方程式に対し、これを Green 公式による境界上の積分方程式におき替える境界値問題として取り扱い解析している。しかしながら、この積分方程式による方法は、速度ポテンシャルを未知量としているために、透過層の構成材が異なる場合には、各領域ごとにこれを区分して考えることが必要で、取り扱いが複雑化する恐れがある。また、解くべき連立方程式の係数行列は、空行列のない、いわゆる full-matrix となるために未知量を余り多く取り得ない難点がある。

そこで、ここでは、井島らと同様、透過層内の流体抵抗は流速に比例すると仮定し、さらに、波圧が全領域を通じて連続であることに注目して、これを未知量とした取り扱いで解析するものである。波圧で表現された支配方程式に有限要素法を適用し、各要素ごとに、透過層の抵抗係数および空隙率で決定される係数を与えるのみで、全解析領域を区分することなく同時に解が求められ、図-3.2.1 に示されるような不均質な透過層の場合や不透過な構造物が混在する場合など、同様の取り扱いで容易に解析できる。

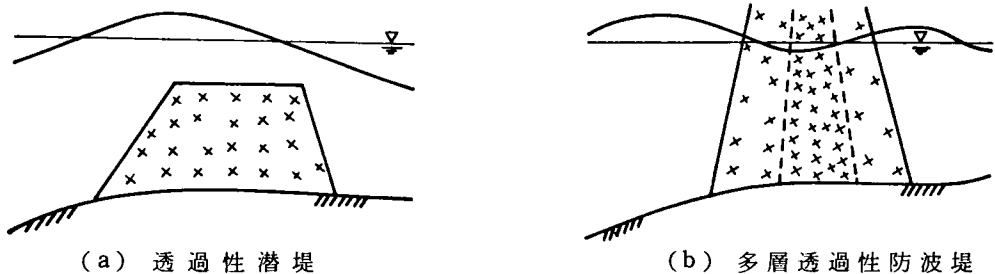
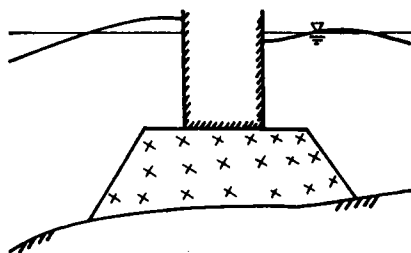
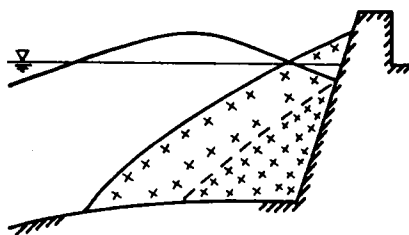


図-3.2.1 (a), (b) 透過性構造物



(c) 透過性基礎と不透過防波堤



(d) 捨石護岸

図-3.2.1 (c), (d) 透過性構造物

ここでは、その解析手法を述べ、つぎに、解析手法の検証計算と適用計算例を示し、透過性構造物の消波効果について考察する。

a) 基礎式

上述した各種の透過性構造物による波の変形問題を解析するが、いま、図-3.2.2のように、流体域を含めた全解析領域が異なる空隙率および流体抵抗をもつ透過層で構成されているものとし、この2次元領域での流体運動を考える。座標系は、静水面に原点をおき、水平に x 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。 x 軸から水面までの水面変動量を $\eta(x, t)$ とする。境界 S_1 は自由表面、境界 S_2 は海底や構造物などの不透過な境界面であり、また、境界 S_3 は解析上設けた仮想境界を意味し、この内外で流体運動の連続性を満たす必要がある。境界 S_1, S_2, S_3 で囲まれた解析領域内で、その構成材の異なる透過性領域では、空隙率を ϵ 、付加質量係数を C_M 、一般には非線形である流体抵抗を線形化した等価線形抵抗係数を μ とする。また、流体運動は微小振幅運動であるとし線形解析を行う。この時、流体は速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t) = \phi(x, z)e^{i\sigma t}$ ($\sigma = 2\pi/T$; T は周期)を持ち、各透過層内の連続式および運動方程式は次式で示される。

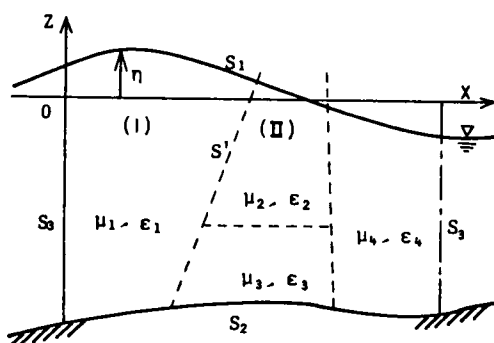


図-3.2.2 解析領域

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.1)$$

$$\frac{1}{gV} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu V \Phi \right) + \frac{p}{\rho g} + z = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.2)$$

ここで

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\epsilon} \left\{ 1 + (1 - \epsilon) C_M \right\}$$

また、 g は重力の加速度、 ρ は流体の密度、 p は流体圧力である。また、係数 μ は動粘性係数を Darcy 則の透水係数で割ったものに相当する。

境界条件は、各透過性領域ごとに、対応する条件を採用するものとして、以下のように示される。

自由表面 S_1 ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \eta &= \frac{1}{gV} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu V \Phi \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.3)$$

不透過な境界面 S_2 ;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (n ; \text{外向き法線方向余弦}) \dots\dots\dots (3.2.4)$$

流体中の仮想境界面 S_3 ;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad (\bar{\Phi} ; \text{解析領域外部の速度ポテンシャル}) \dots\dots\dots (3.2.5)$$

一方、各透過性領域の境界面、たとえば、図-3.2.2 中の領域 (I) , (II) の境界 S' での条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \\ \frac{1}{gV_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu V \Phi \right)_1 &= \frac{1}{gV_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu V \Phi \right)_2 = - (p/\rho g + z) \equiv -H \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.6)$$

で示される。これらはそれぞれ、mass-flux および energy-flux を規定するものである。

以上、解析としては、式 (3.2.6) の条件の下に式 (3.2.1) から式 (3.2.5) で示される境界値問題として取り扱うことができ、先に第2章第2節で述べた有限要素法の解析手法を透過層の異なる各領域ごとに適用して解析することも可能である。しかしながら、この Φ を未知量とした解析方法は、各透過性領域間で Φ が不連続関数であるため、各領域境界 S' ごとに式 (3.2.6) を満足させる必要が生じ、不均質な透過層が混在する場合には、その取り扱いが面倒になる。そこで、ここでは、式 (3.2.6) で示されるように、波圧成分 H が解析の全領域で連続であることに注目して、これを未知量とした解析を行う。

入射波の周波数 σ による流体運動の周期性を考え、 $\mathbf{H} = H \cdot e^{i\sigma t}$ ($i = \sqrt{-1}$) とすると、式 (3.2.6) より

$$\phi = -\beta \cdot H, \quad \beta = gV / (i\sigma + \mu V) \quad \dots\dots\dots (3.2.7)$$

が得られる。これを用いて各透過性領域での基礎式および境界条件を書き改めると以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{領域内部;} \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \\ \text{自由表面;} \quad & i\sigma H \Big|_{z=0} = -\beta \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \text{境界 } S_2; \quad & \beta \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \\ \text{境界 } S_3; \quad & \beta \frac{\partial H}{\partial n} = \beta \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} \quad (\bar{H} = -\frac{1}{\beta} \phi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.2.8)$$

ただし、 β すなわち透過層の空隙率 ϵ および抵抗係数 μ は等方性を持つと仮定している。

なお、考える領域が流体のみの場合は、以上の各式で $\epsilon = 1$, $\mu = 0$ とすればよい。

b) 有限要素法による定式化

式 (3.2.8) で示される境界値問題に対し変分法による有限要素法の適用を行う。停留化すべき汎関数 χ を次のように考える。

$$\chi = \iint \frac{1}{2} \left\{ \beta \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz - \int_{s_1} QH dS_1 - \int_{s_3} RH dS_3 \quad \dots\dots\dots (3.2.9)$$

ここに、変分を受ける独立量は H のみである。上式の第1変分を取り、結果のみを示すと次のようである。

$$\begin{aligned} \delta \chi = & - \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right\} \delta H \cdot dx \cdot dz + \int_{s_1} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial n} - Q \right) \delta H \cdot dS_1 \\ & + \int_{s_2} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial n} \right) \delta H \cdot dS_2 + \int_{s_3} \left(\beta \frac{\partial H}{\partial n} - R \right) \delta H \cdot dS_3 \quad \dots\dots\dots (3.2.10) \end{aligned}$$

すなわち、上式から式 (3.2.9) の汎関数を停留にする条件を用いれば式 (3.2.8) の基礎条件式をすべて同時に得ることができる。ただし、上式中の Q と R はそれぞれ、 $Q = -i\sigma H$, $R = \beta \frac{\partial \bar{H}}{\partial n}$ である。

上述の変分原理を用いるために、先と同様、解析領域を三角形要素群に分割して、1つの要素 i, j, m 内での $H(x, z)$ をその節点値 $\{H\}^T = [H_i, H_j, H_m]$ で表現すると、

$$H(x, z) = [N_i, N_j, N_m]\{H\} = [N]\{H\} \quad \dots\dots\dots (3.2.11)$$

ここに、 $[N]$ は三角形要素の形状関数である。また、以下に用いる係数マトリックスの表現は、特記するもの以外は第2章第2節と同様であるので、ここでは省略する。

さて、式(3.2.11)から、領域内の各要素について、

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \mathbf{B}^T \{H\} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \mathbf{C}^T \{H\} \quad \dots\dots\dots (3.2.12)$$

また、境界 S_1 、 S_3 では境界上の節点 i, j 、での値を用いて

$$H = [N_i, N_j] \{H\} \quad , \quad Q = [N_i, N_j] \{Q\} \quad , \quad R = [N_i, N_j] \{R\} \quad \dots\dots\dots (3.2.13)$$

と表現すると、式(3.2.9)の汎関数 χ は有限個の節点値で離散化でき、次式で示される。

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_V \{H\}^T (\beta \cdot \mathbf{B}\mathbf{B}^T + \beta \cdot \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{H\} \cdot \Delta - \sum_{s_1} \{H\}^T \mathbf{S} \{Q\} - \sum_{s_3} \{H\}^T \mathbf{S} \{R\}$$

$$\Delta \text{ は三角形の面積, } \beta \text{ は各要素での値} \quad \dots\dots\dots (3.2.14)$$

\sum_V , \sum_{s_1} , \sum_{s_3} はそれぞれ、解析領域 V 、境界 S_1 、 S_3 に関する節点についての総和を意味する。上式に、先の変分原理を適用して、 $\{Q\} = -i\sigma\{H\}$ 、 $\{R\} = \beta\left\{\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}\right\}$ を用いると、次の連立方程式が得られる。

$$\sum_V \beta (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{H\} \Delta + i\sigma \sum_{s_1} \mathbf{S} \{H\} - \sum_{s_3} \beta \cdot \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.15)$$

上式中、仮想境界 S_3 上で $\frac{\partial \bar{H}}{\partial n}$ が与えられると、これに対応した透過性全領域での波圧 H の分布が求まる。この境界 S_3 における流体運動の連続条件は、mass-flux および energy-flux が連続でなければならないことであるが、この仮想境界での処理方法はすでに前章で述べている。以下には、波圧 \bar{H} に対する条件として簡単に述べることにする。

仮想境界は z 軸に平行に取り、さらに、その設置場所を流体領域で考えるものとする。これより、解析領域外部での $\beta \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} (= -\bar{\phi})$ は波の入射位置および通過位置で次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \text{入射位置;} & -\beta \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = l_{x_i} k_i (e^{-ik_i x_i} - A_r e^{ik_i x_i}) \frac{\cosh k_i (h_i + z)}{\cosh k_i h_i} \\ \text{通過位置;} & -\beta \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = l_{x_t} k_t A_t \frac{\cosh k_t (h_t + z)}{\cosh k_t h_t} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.2.16)$$

この両式は式(2.2.25)、(2.2.26)と等しく、これを用いることによって mass-flux の連続性が満足される。一方、energy-flux $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)$ に関しては、 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)$ を上式で考慮しているので、これ

を近似的に

$$\int_{s_3} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS_3 = \int_{s_3} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} dS_3 \quad \dots\dots\dots (3.2.17)$$

とする。この積分を水底から静水面まで行くと、入射位置および通過位置について、新たな次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{s_3-inp} \beta \bar{S}(H) + i \frac{ga}{\sigma k_i} e^{ik_i x_i \cdot \tanh k_i h_i} \cdot A_r \\ = -i \frac{ga}{\sigma k_i} e^{-ik_i x_i \tanh k_i h_i} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.2.18)$$

$$\sum_{s_3-out} \beta S(H) + i \frac{ga}{\sigma k_t} \tanh k_t h_t \cdot A_t = 0$$

以上、式(3.2.16)を式(3.2.15)に代入して得られる連立方程式と式(3.2.18)を連立させて解くことによって、全未知量 H 、 A_r 、 A_t が決定され、他の諸量も次のように簡単に求めることができる。

(i) 通過率 K_t および反射率 K_r

$$K_t = |A_t|, \quad K_r = |A_r| \quad \dots\dots\dots (3.2.19)$$

(ii) 水面波形 η

$$\eta = H(x, 0) \cdot e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (3.2.20)$$

(iii) 速度ポテンシャル Φ

$$\Phi = -\beta[N]\{H\} e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (3.2.21)$$

c) 計算方法の検証と適用計算例

図-3.2.3は図中に示す透過性潜堤の反射率 K_r および通過率 K_t を、抵抗係数 $\mu=0$ 、空隙率 $\epsilon=0.5$ 、0.1、0.05として計算したものであり、検証計算の一例である。これは流体抵抗がなく、空隙率のみを考えた仮定の透過潜堤であって、図から知れるように、 ϵ を小さくすると図中に実線で示した不透過な潜堤(先の図-2.4.6で検証した)の場合に近づくことがわかる。また、この時 $K_r^2 + K_t^2 = 1.0$ であり、さらに、 $\epsilon = 1.0$ の流体のみとすると当然ながら $K_r = 0$ 、 $K_t = 1.0$ なる結果が得られ計算方法の妥当性が確認できる。

不透過潜堤の消波特性は、堤体の高さによって通過波と反射波の分配比が決定され、さらに、堤体上では、入射波の周期、堤体長および天端上水深によって決まる流体の自由振動が励起されて、ある特定

の入射波に対して反射率 0 の状態が出現する。
また、図より、堤体の空隙率のみの変化による消波効果は、不透過潜堤の消波機構に、堤体内部からの流体運動の相互効果が加わり、その結果、反射率 0 の点が変動することがわかる。

図-3.2.4、図-3.2.5、図-3.2.6、図-3.2.7の各図は、それぞれ図中に示すように、一定水深 h 上に設置された鉛直壁面をもつ透過性構造物の反射率 K_r 、通過率 K_t および構造物に作用する水平力 $P_H / \rho g a \bar{q} h$ (a は入射波振幅、 $\bar{q} h$ は堤体の高さ) を、種々の ($\sigma^2 h / g$) の値をもつ入射波に対し、本解析法によって計

算した結果である。なお、透過層の付加質量係数 C_M は、抵抗係数 μ とともに、透過層内の流体運動における Reynolds 数あるいは Strouhal 数によって変化することが知られており、正確には、流体運動に対応した値を用いることが必要で、本計算法においても、随時その値および場所的变化を考慮して容易に計算することが可能であるが、実際的な波動場におけるこれらの値は詳細な実験データをもとに推定されねばならず、現在なお不明な点が多い。本計算法では、式(3.2.2)で示すように、 C_M は空隙率 ϵ と類似の効果を示すものと考えられるので、ここでは $C_M = 0$ とし、 $\epsilon = 0.5$ として計算している。

図-3.2.4 は、 $\epsilon = 0.5$ 、 $\mu / \sigma = 2.0$ 、堤体幅・水深比 $B / h = 1.0$ の場合、堤体高 $\bar{q} h = (1 - q) h$ ($q h$ は天端上水深) の影響を、図の(a)反射率 K_r 、(b)通過率 K_t および(c)水平力 $P_H / \rho g a \bar{q} h$ について、 $q = 0.0, 0.2, 0.4$ として示したものである。

また、図-3.2.5 および図-3.2.6 の各図は $\epsilon = 0.5$ 、 $\mu / \sigma = 2.0$ でそれぞれ、 $q = 0.2$ および $q = 0.4$ の場合、堤体幅・水深比 $B / h = 1.0, 2.0, 3.0$ として、堤体幅の効果を調べたものである。さらに、図-3.2.7 の各図は $\epsilon = 0.5, q = 0.2, B / h = 1.0$ とし、抵抗係数 μ / σ を $0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ と変化させてその影響を示したものである。

これらの図より、反射率 K_r は、天端上水深 $q h$ が小さくなり、かつ、抵抗係数 μ / σ が大きくなると大となるが、堤体幅 B / h による影響はあまり著しくなく、 $\sigma^2 h / g$ とともに変動する周期が変化することがわかる。さらに、この場合の不透過潜堤(図-2.4.6)に見られるような反射率 0 の状態は存在せず、全体的に反射率は低くなっていることがわかる。

次に、通過率 K_t は、 K_r と異なり、堤体高さ、堤体幅および抵抗係数の値によって著しく変化し、 $\bar{q} h$ 、 B / h 、および μ / σ が大となるほど K_t は小となることがわかる。図-2.4.6 および図-3.2.3 に示す不透過潜堤の場合には、反射率が与えられると、そのみによって通過率が決定されるが、透過

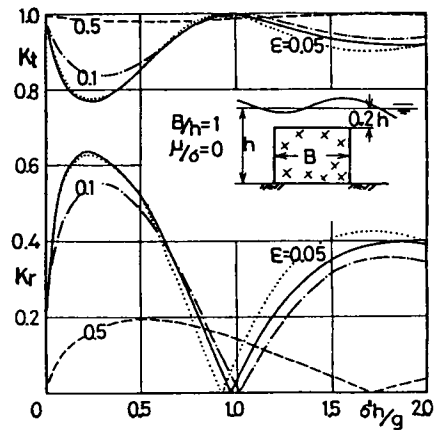
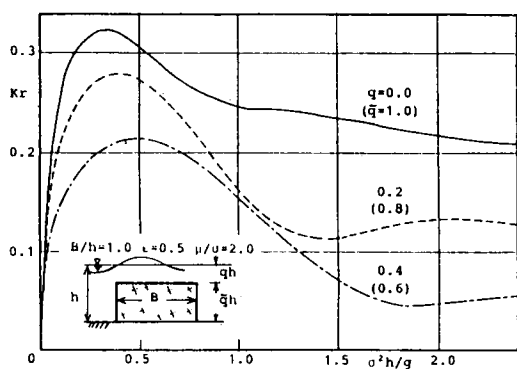
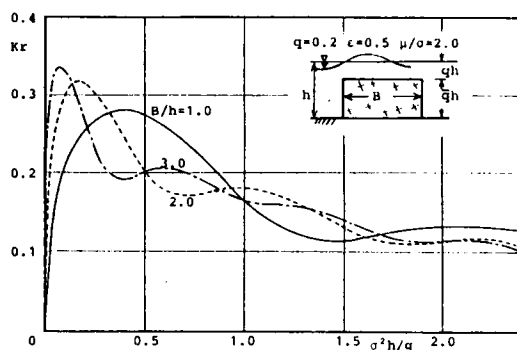


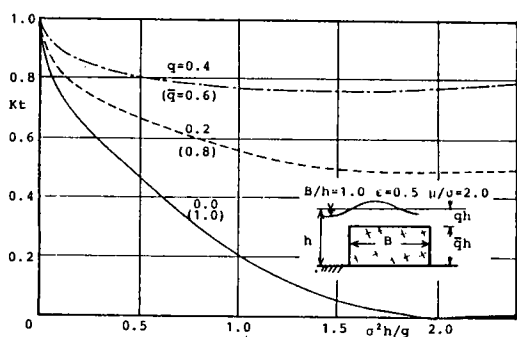
図-3.2.3 空隙率の変化による通過率と反射率



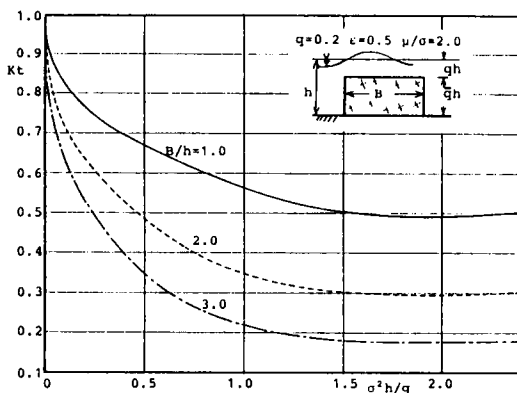
(a) 反 射 率



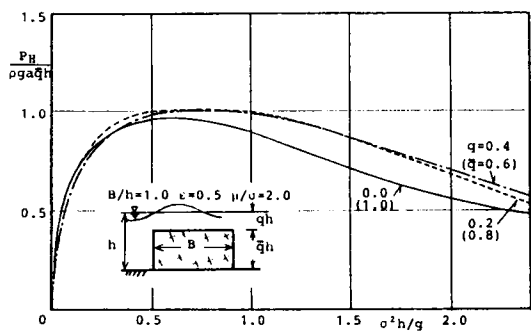
(a) 反 射 率



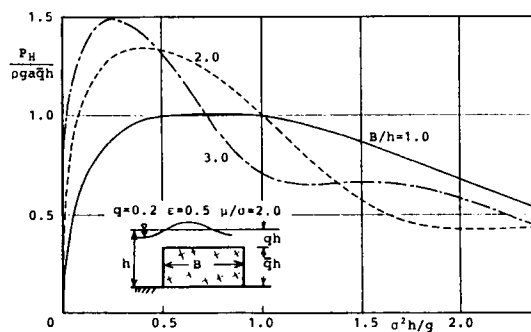
(b) 通 過 率



(b) 通 過 率



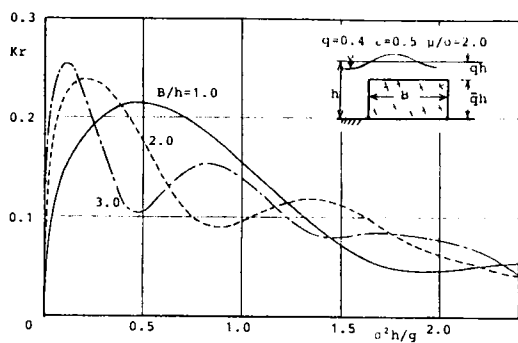
(c) 水 平 力



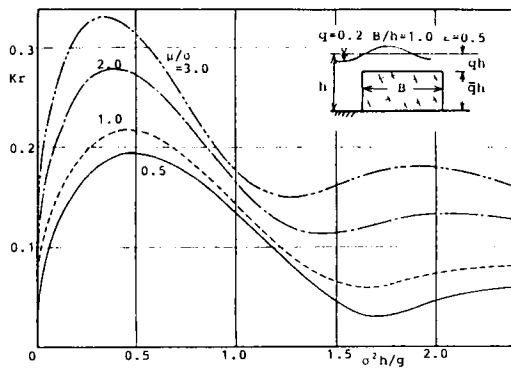
(c) 水 平 力

図-3.2.4 堤体高の影響

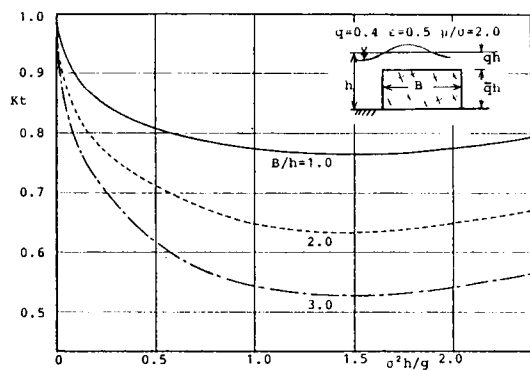
図-3.2.5 堤体幅の影響 ($q = 0.2$)



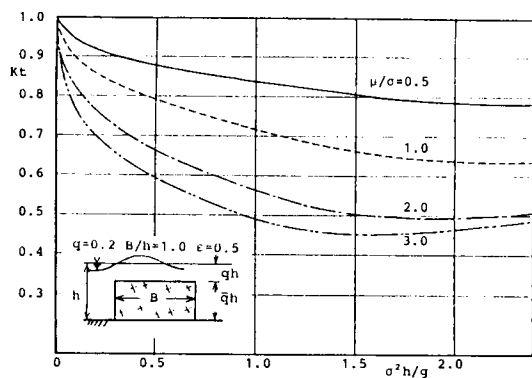
(a) 反 射 率



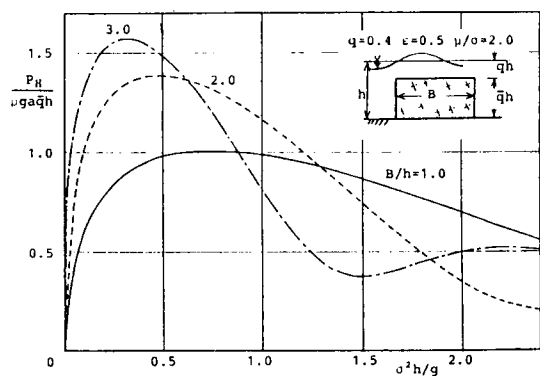
(a) 反 射 率



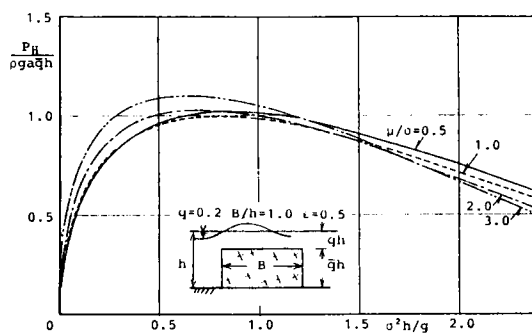
(b) 通 過 率



(b) 通 過 率



(c) 水 平 力



(c) 水 平 力

図一 3.2.6 堤体幅の影響 ($q = 0.4$)

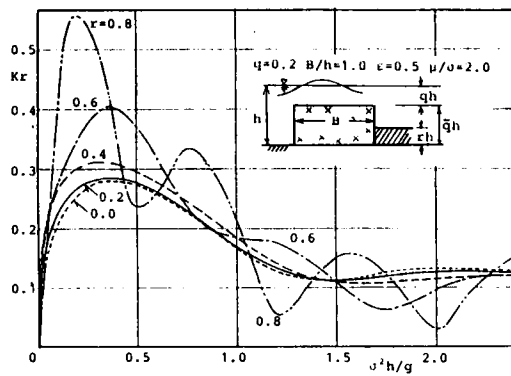
図一 3.2.7 抵抗係数の変化による影響

性の構造物の場合には、反射率の他に、透過層の流体抵抗と流体中に含まれるその体積によって決まるエネルギー損失量の大小によって通過率が決定される。

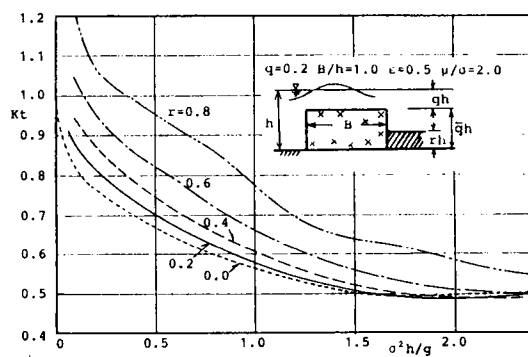
また、堤体に作用する水平力は、堤体の高さおよび抵抗係数の値によってほとんど変化せず、堤体の幅 B/h によって、ほぼ一定の変化を示す。すなわち、堤体に作用する水平力は、堤体内部の圧力の水平勾配の大きさに起因し、最終的には、堤体の前後面における波動の位相差に応じた量が作用するので、堤体の幅が決まると、堤体高や抵抗係数に余り影響されず、ほぼ一定の水平力が作用することになる。

透過性構造物の消波効果は、主にその内部におけるエネルギー損失によることは明らかであるが、このために、抵抗係数を過大にし、かつ、堤体高さを大とすると、反射率は増大し不透過潜堤に近づき不都合である。したがって、反射率、通過率ともに小となる効果的な透過性構造物としては、図-3.2.1(b)に示すような波の前面に空隙の大きな透過層を持ち、内部で空隙を小とし抵抗係数がある程度大きい構造をもつ多層の透過性構造物や遊水部を持つ構造^{10), 11)}などがよいことが、これらの結果からも考えられる。

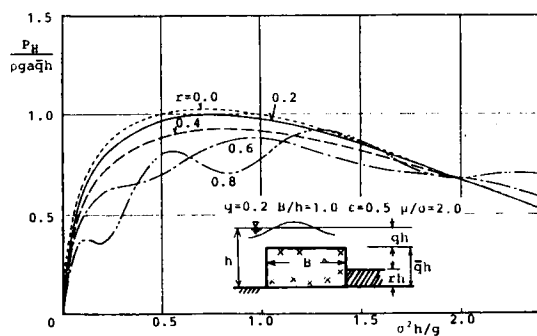
図-3.2.8の各図は図中に示すように、透過な潜堤の背後の水深が変化する場合を計算したもので、養浜工を施す場合の法止工として透過潜堤を用いた場合の効果を検討したものである。透過潜堤を $\varepsilon = 0.5$, $\mu/\sigma = 2.0$, $B/h = 1.0$, $q = 0.2$ として、背後の水深 $(1-r)h \equiv \bar{r}h$ で $r = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ と変化させた時の(a)反射率 K_r , (b)通過率 K_t , (c)潜堤に働く水平力 $P_H/\rho g a q h$ を示している。堤体背後の水深が浅くなると、不透過壁の影響が大となり、反射率および水平力は入射波の $\sigma^2 h/g$ によって変動するようになる。また、通過率 K_t は、通過波振幅と入射波振幅の比として定義しているために、通過部の水深が浅くなると波高の浅水効果によって、長周期の波 ($\sigma^2 h/g$ が小さい場合) の K_t は1よりも大となっている。しかしながら、実際の有限振幅の波では、天端上水深によって碎波が起こり、特に、このような不連続な海底形状の流体場では碎波が起こり易くなると考えられるので、これらの結果とは異なることが予想され、正確には、波動場での抵抗係数 μ/σ の値と同様、碎波による消波効果に関しては実験的に検討する必要がある。



(a) 反 射 率



(b) 通 過 率



(c) 水 平 力

図一3.2.8 堤体背後の水深の影響

(2) 離岸潜堤の消波機構に関する考察

近年、海岸の多様な価値、例えば日常生活やレクリエーションの場として、あるいはその景観そのものの等の価値が高まりつつあり、また生態学上や水質保全上の海浜の役割の重要性も主張されている。しかし、このような海岸の価値と、防災を目的とした海岸構造物の存在は、平常時には必ずしも両立しない場合が多い。

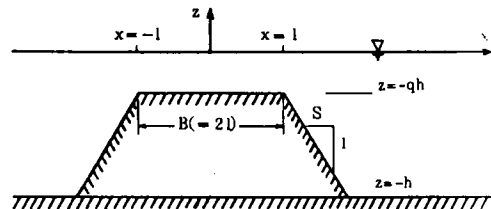
最近はこの双方を両立させる海岸保全対策が、考えられつつあるが、例えば養浜工を砂浜がほとんど無い海岸や埋立地前面に実施するためには養浜法尻の砂止壁堤（法止工）と同時に荒天時に養浜砂が取られない程度まで来襲波を消波できる構造物をより沖合に設ける必要がある。あるいは単に護岸工事を小規模化したり、また水産土木の立場からは養殖漁場造成のために、沖合の消波構造物が必要となることも多い。

このような沖合における前衛消波構造物としては、透過防波堤や浮消波堤等が挙げられるが、視野の確保や景観上、またある程度の天端水深を確保できると、ヨット等の海面レクリエーションやボート等の利便の上でも潜堤は優れた構造物といえる。本節ではこのような大水深の海域に設置する場合の潜堤を考え、これの消波特性について考察するものである。

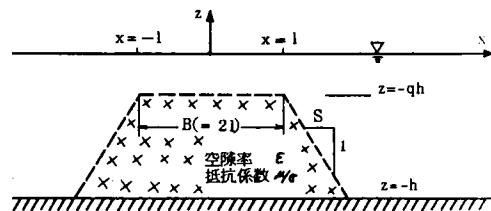
a) 計算方法と潜堤のモデル

流体は非圧縮、非回転運動をし、速度ポテンシャルをもつものとし、水深方向に2次元の領域で微小振幅運動をするものとする。このときの、透過層領域を含む波動の基礎式は、前節 a) で示した式に従うものとする。計算方法は第2章第2節および本章の第2節(1)ですでに示した有限要素法による計算方法を用い、一部、理論的考察においてポテンシャル接続法を用いる。計算の対象とする潜堤のモデルは、図-3.2.9に示すように、不透過潜堤、透過潜堤および水平板式干涉型潜堤の3種をとりあげる。

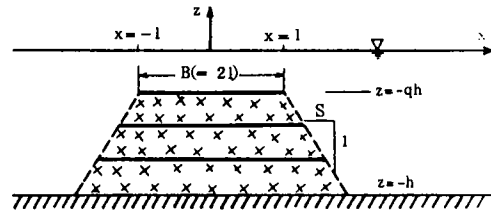
まず、不透過潜堤および透過潜堤に関し、井島らによってすでに与えられている結果に潜堤法勾配の影響を追加計算してその消波効果を考察し、さらに水中に水平板を置いて板上部の水面波と板下部の流れの間での位相差



(a) 不透過潜堤



(b) 透過潜堤



(c) 水平板式干涉型潜堤

図-3.2.9 潜堤のモデル

による干渉を利用し消波を行う水平式板干渉型潜堤を取り上げて消波効果を調べる。この水平式潜堤は、水平板型透過性防波堤として、服部・松本（1977）¹²⁾により報告されているものと同じものである。なお、透過潜堤の計算に際しては、式（3.2.2）での C_M は常に0とした。

b) 計算結果と考察

法勾配 $S=0$ の透過性潜堤の通過率 K_t は、ポテンシャル接続法⁶⁾で scattering wave の項を無視すると次式で示される。

$$K_t = |(\cos 2\nu_0 l + iR \sin 2\nu_0 l)^{-1}| \quad \dots\dots\dots (3.2.22)$$

ただし同式中 ν_0 は次式で決められるところの潜堤上を進行する波の複素 wave number である。

$$r = \nu_0 h (\beta \tanh q\nu_0 h + \tanh \bar{q}\nu_0 h) / (\beta + \tanh q\nu_0 h \cdot \tanh \bar{q}\nu_0 h) \quad \dots\dots\dots (3.2.23)$$

ここに、 $r = \sigma^2 h/g$, $\bar{q} = 1 - q$, $\beta = (1 - iV\mu/\sigma)/V$ である。

また、ここで $R = (1 + \alpha^2)/2\alpha$, また $\lambda_0 = kh$, $\lambda_0' = \nu_0 h$ とにおいて

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda_0'}{\lambda_0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) (\lambda_0' - \lambda_0 \tanh \lambda_0 \tanh q\lambda_0') \right. \\ &\quad \times (\lambda_0' \tanh \bar{q}\lambda_0 - \lambda_0 \tanh \bar{q}\lambda_0') / \{ \lambda_0' \tanh q\lambda_0 \\ &\quad \left. - \lambda_0 \tanh \lambda_0 + \lambda_0' \tanh \bar{q}\lambda_0 (\lambda_0' - \lambda_0 \tanh \lambda_0 \tanh \lambda_0') \} \right] \\ &\approx \lambda_0' / \lambda_0 = (k^{(r)} + i k^{(i)}) / k \quad (\text{透過潜堤}) \\ &= k' / k \quad (\text{不透過潜堤}) \end{aligned}$$

$\nu_0 = k^{(r)} + i k^{(i)}$ とおくと実部 $k^{(r)}$ が wave number, 虚部 $k^{(i)}$ が減衰率を表わす。

不透過潜堤では $\nu_0 = k'$ で、 k' は分散関係式 $\sigma^2 qh/g = k'qh \tanh k'qh$ を満足する wave number である。なお、 σ は入射波の角周波数（ $= 2\pi/T$; T は周期）である。式（3.2.22）で R を実部と虚部に分けて $R = R_{(r)} + i R_{(i)}$ とすると

$$\begin{aligned} K_t &= \left\{ \frac{1}{2} (1 - R_{(r)}^2 - R_{(i)}^2) \cos 4k^{(r)}l - R_{(i)} \sin 4k^{(r)}l \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 + R_{(r)}^2 + R_{(i)}^2) \cosh 4k^{(i)}l + R_{(r)} \sinh 4k^{(i)}l \right\}^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (3.2.24) \end{aligned}$$

となる。上式は周期的振動項と非振動項より成るが、 $k^{(i)}l$ が大きい時は振動項は無視されて次式となる。

$$\begin{aligned}
 K_t &= \left\{ \frac{1}{2} (1 + R_{(r)}^2 + R_{(i)}^2) \cosh 4k^{(i)}l + R_{(i)} \sinh 4k^{(i)}l \right\}^{-1/2} \\
 &\approx \sqrt{2e^{-4k^{(i)}l} / (1 + R_{(r)}^2 + R_{(i)}^2 + 2R_{(i)})} \\
 &\approx e^{-2k^{(i)}l} \quad (\because |R| \approx 1.0) \quad \dots\dots\dots (3.225)
 \end{aligned}$$

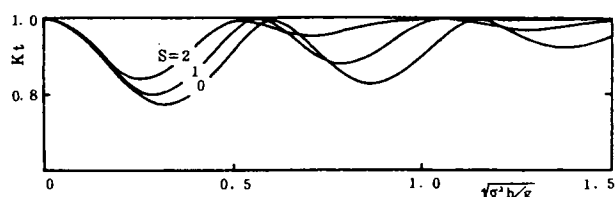
一方、空隙率が小さく、また抵抗係数が大きくなると $R_{(i)}$ および $k^{(i)}$ が 0 に近づいて通過率は大きくなり、かつ振動項が卓越するようになり、不透過潜堤では次式となる。

$$K_t = \sqrt{2} / \{ (1 - R_{(r)}^2) \cos 4k'l + (1 + R_{(r)}^2) \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (3.226)$$

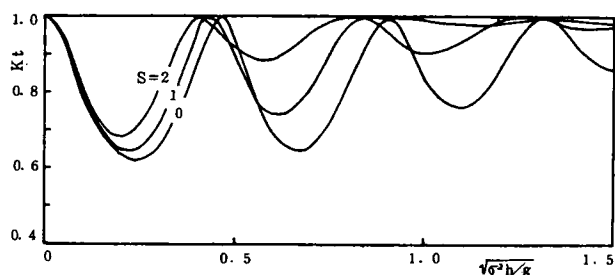
これより、不透過潜堤では $\cos 4k'l = 1$ すなわち堤体幅が天端上の進行波の半波長およびその整数倍の時 $K_t = 1$ の完全通過で、 $\cos 4k'l = -1$ の時通過率は最小の極値をとる。

このような、理論的考察によって、不透過および透過な潜堤の通過率 K_t に関する定性的な傾向が知られる。以下には、本法の有限要素法による計算結果をもとに各種潜堤の消波効果について考察する。

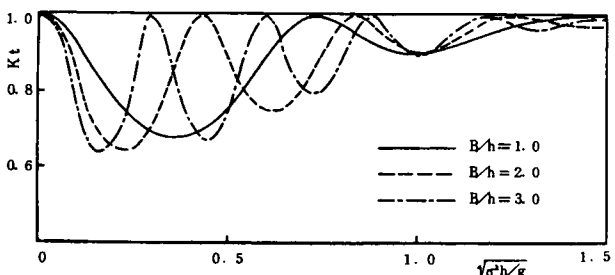
図-3.2.10 の(a), (b), (c)の各図は、不透過潜堤の通過率を示したものである。同図で(a), (b)は潜堤の法勾配 S を、また、(c)は堤体の幅 B を変化させたときの通過率におよぼす影響を、各種入射波に関するパラメーター $\sqrt{\sigma^2 h/g}$ に対し計算した結果である。この横軸のパラメーター $\sqrt{\sigma^2 h/g}$ と入射波の周期および水深 h の関係を図-3.2.11 に示す。さて、図-3.2.10 の各図は、上述の式(3.226)で示されるような通過率の振動現象が現われているが、完全通過 ($K_t = 1.0$) する場合の堤体幅・堤体上波長比を調べると、これは 0.5 およびその整数倍よりやや小さい値である。これは、堤体による散乱波の効果により、完全通過する入射波が式(3.226)の近似式の場合と多少異なるためと考えられる。堤体の法勾配



(a) 法勾配の効果 ($B/h=2.0$, $q=0.2$)



(b) 法勾配の効果 ($B/h=2.0$, $q=0.1$)



(c) 堤体幅の影響 ($q=0.1$, $S=1$)

図-3.2.10 不透過潜堤の通過率 (K_t)

の効果は、法勾配がゆるやかになるほど通過率を大とする方向に作用し $\sqrt{\sigma^2 h/g}$ による通過率の振動周期は多少短くなる傾向を示す。また堤体幅の通過率に与える効果は、堤体幅を大きくしても振動周期が変化するのであることがわかる。天端上水深 q は小さいほど平均的通過率は小さくなるが、不透過潜堤の場合、全体的に通過率は大きく、非碎波による消波効果は余り期待できない。

図-3.2.12は図-3.2.9(b)に示す透過性潜堤の通過率と反射率を計算した結果である。通過率の特性は式(3.2.25)で定性的に示されるように、指数的に変化し、不透過潜堤にあった振動現象は反射率にわずかに現われるのみで、消波機構は主として透過層内のエネルギー損失による。これは、反射率が小さいことから推定できる。堤体の天端上水深が浅くなり、さらに、法勾配がゆるやかになると、反射率、通過率ともに小さくなるが、この、法勾配の消波効果に対する寄与は透過層全体の容積の増加によるとみるべきであろう。

図-3.2.13は式(3.2.25)を用いて、透過性潜堤上で、 $K_t = 0.5$ すなわち、入射波の波高が半減する距離 $B_{0.5}$ を q および μ/σ をパラメーターとして示したものである。縦軸が波高の半減する距離と水深との比 $B_{0.5}/h$ である。また、 $K_t = 0.25$ とは

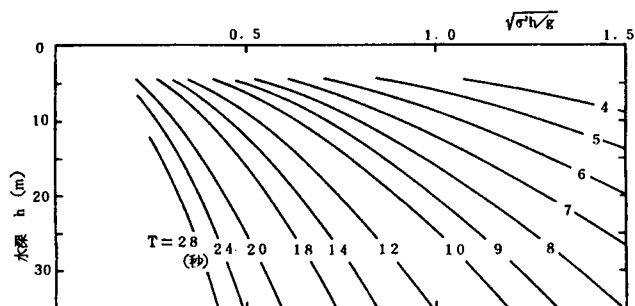


図-3.2.11 パラメーター $\sqrt{\sigma^2 h/g}$ と波の周期 T 、水深 h の関係

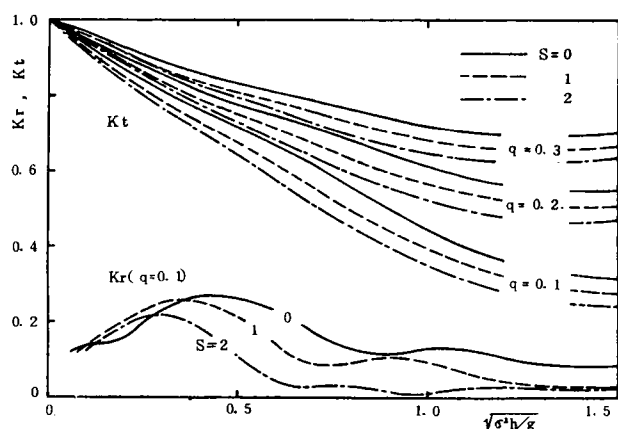


図-3.2.12 透過潜堤の通過率 (K_t) と反射率 (K_r)
($B/h=2.0$, $\mu/\sigma=1.0$, $\epsilon=0.5$)

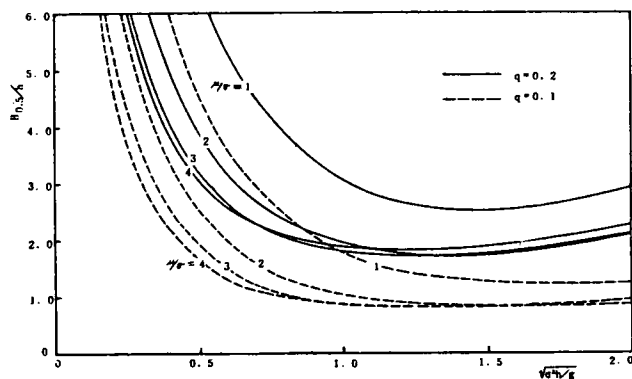


図-3.2.13 透過潜堤上での波高半減距離 ($\epsilon=0.5$)

る距離（あるいは堤体幅）を知りたい時は縦軸の数値を2倍にして使用すればよい。この図より、 μ/σ は2程度以上が望ましいことがわかるが、 μ/σ が過大になりすぎると図-3.2.7で考察したように不透過潜堤に近づき不都合が生じる。したがって、堤体幅が短かくてすむ有利な透過潜堤を考える場合には、これをもとに適当な抵抗係数を持つ透過層を構成する必要がある。ここで、 μ/σ の値は透過堤体の構造が決まると一義的に決まるものではなく、波の性質に依存していることを注意する必要がある。塩化ビニール管を使って立体格子構造を作り、これの抵抗を調べた結果¹³⁾によると、透過層内の断面平均流速の振幅を u_0 、透過層構成材の代表径を d とすると、 $u_0/\sigma d$ （一種のストローハル数の逆数あるいは $K-C$ 数）の値が2以上のときは、 $\mu/\sigma \propto \sqrt{u_0/\sigma d}$ で示され、 $u_0/\sigma d$ が2のとき、 μ/σ は1前後の値をとる。ここで、透過層内の流速は波による水平流速に比例すると考えると、 $u_0 \propto \sigma H / \tanh kh$ （ H は波高）より次式のようになる。

$$\mu/\sigma \propto \sqrt{H/d \cdot \tanh kh} \quad \dots\dots\dots (3.2.27)$$

すなわち、 μ/σ は波高が大きいほど、また、長波性の波ほど大きくなることが示される。また、 μ/σ の値がほぼ1の値で、かつ、上式が成立する下限の $u_0/\sigma d = 2$ の値のときは、水粒子が透過層内の断面平均流速で動く時の移動距離が、透過層構成材の径の2倍であることを意味しているの、透過潜堤の構成材の1つの大きさが、波高に比較し得る大きさのものを考えると、図-3.2.13からも知れるように、透過層はほぼ妥当な抵抗係数を持つことになる。

図-3.2.14、図-3.2.15に水平板式潜堤の通過率を示す。この場合、水平板下部の流体運動は水平板の入射側と通過側で位相差が無いのに対し、板上部の運動は水面波の位相速度で進む。このため、板上の水面波が板の両端で逆の位相となる $B/L' \approx 0.5, 1.5 \dots\dots$ （ L' は板上の波の波長）の時干渉が起こり、反射率が大きく、通過率は小さくなる。図-3.2.14の各図より、板上の水深が浅いほど消波効果

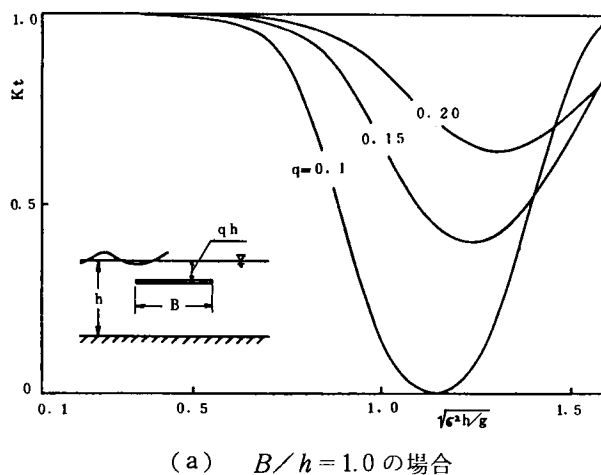
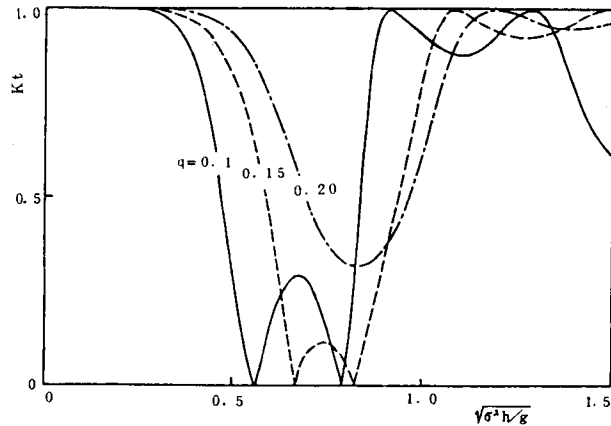
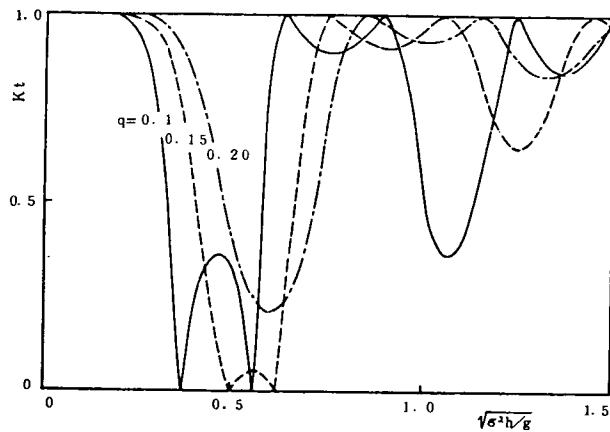


図-3.2.14 (a) 水平板式潜堤の通過率 (K_t)
(plate 1枚, $\mu/\sigma = 0$, $\epsilon = 1.0$)



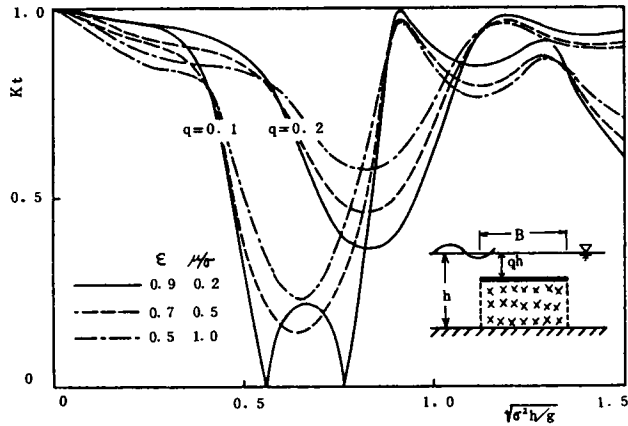
(b) $B/h = 2.0$ の場合



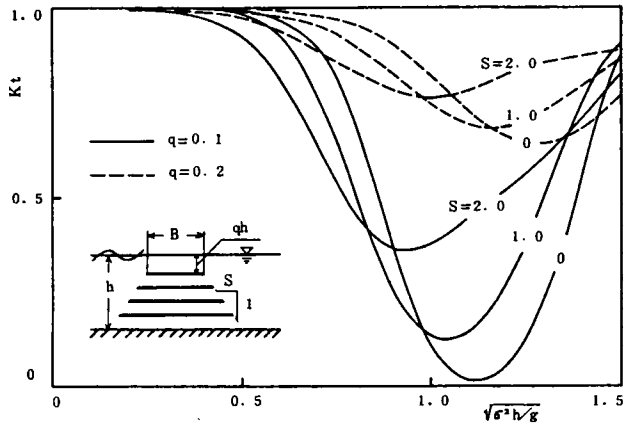
(c) $B/h = 3.0$ の場合

図一3.2.14 (b), (c) 水平板式潜堤の通過率 (K_t)
(plate 1 枚, $\mu/\sigma=0$, $\varepsilon=1.0$)

は大となるが、 B/h が大きく q が小さい時、 $K_t = 0$ の場所が 2ヶ所存在し、 K_t の曲線が折返しの状態になっているのは、板下部からのエネルギー伝達量が板上部のそれより大きいためである。図一3.2.15(a)は板下部に透過層がある時の計算例であるが、この型の潜堤では、板下部の抵抗が小さく、かつ、空隙率が大きい方が消波効果も大きい。図一3.2.15(b)は多層よりなる水平板潜堤の場合であるが、この時の法勾配の効果は、板下部より伝達されるエネルギーの位相を分散させる効果を持ち、勾配がゆるやかになるほど消波効果は逆に低下する。したがって、広範囲の入射波周期に対して消波効果を期待する場合には、この多層式よりも、図一3.2.14で示した堤体幅（水平板の幅）の異なる潜堤を波の進行方向に並列して設置すれば、より消波効果は高まると考えられる。



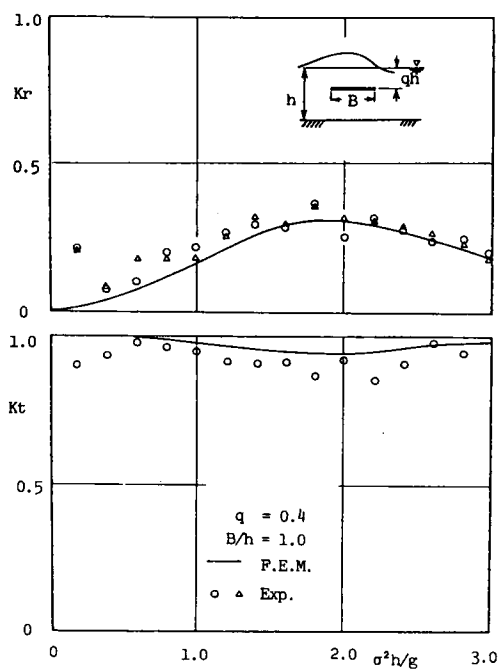
(a) plate下部の空隙率と抵抗係数の効果
(plate 1 枚, $B/h=2.0$)



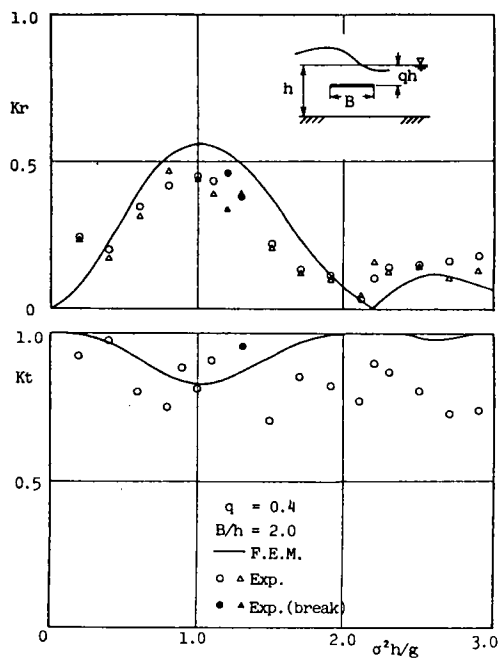
(b) plate枚数と法勾配の効果
(plate 4 枚, $B/h=1.0$, $\mu/\sigma=0$, $\epsilon=1.0$)

図—3.2.15 水平板式潜堤の通過率 (K_t)

図—3.2.16, 図—3.2.17は水平板式潜堤の計算結果と実験結果との比較を行ったもので, 通過率 K_t , 反射率 K_r を示している。実験の反射率の測定は Healy の方法により求めた。また, 通過波は高周波成分が発生し不規則波に近くなるので, 実験での通過率は, $K_t = \sqrt{\eta_i^2} / \sqrt{\eta_t^2}$ (η_i : 入射波, η_t : 通過波) として定義し, これをプロットした。これらの図から, q が小さくなると波の有限振幅性が現われて多少計算結果からずれてくるが, 全体的に非碎波の状態での一致は良好である。また, 干渉が生じて反射率が大きくなる周波数域では, 図中にも示す通り碎波が生じやすくなっている。この碎波の状態は, 板下部から流出した流体が板上を逆流し, 板上では, そのほとんどが巻き波碎波となる。この結果, 反射率は本計算による結果よりも低減するが, 通過率は碎波が生じても本計算結果に近いことがわかる。

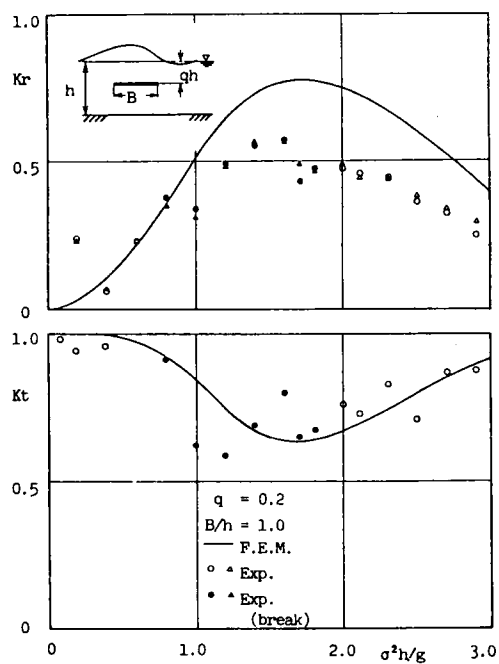


(a) $q=0.4, B/h=1.0$

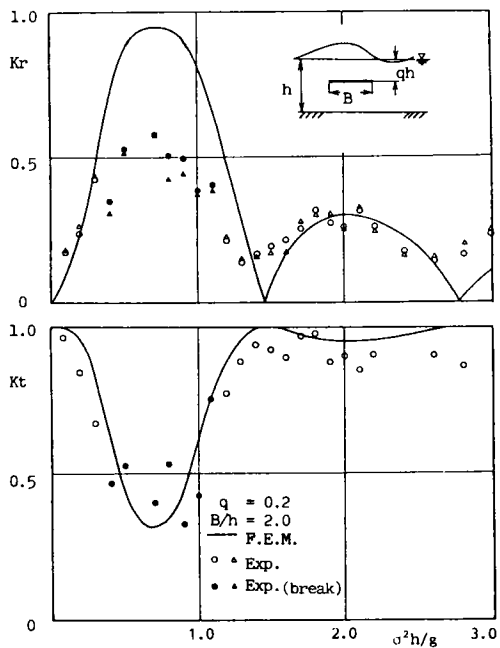


(b) $q=0.4, B/h=2.0$

図-3.2.16 水平板式干渉型潜堤の通過率と反射率 ($q=0.4$)



(a) $q=0.2, B/h=1.0$



(b) $q=0.2, B/h=2.0$

図-3.2.17 水平板式干渉型潜堤の通過率と反射率 ($q=0.2$)

図-3.2.18は、潜堤近傍の水面変動の時間変化を第2章第3節で述べた有限要素法の有限振幅波の解析法によって計算し示したものである。両図とも潜堤の入射側では有限振幅重複波が形成され、潜堤上で波の波長が短くなる様子が知れる。また、通過波は、不透過潜堤では規則性を帯びているが、水平板式潜堤では、実験での状況とよく一致して、高周波成分が発生し不規則波に近くなる様子が計算できている。

図-3.2.19に各種潜堤の波圧分布を示す。透過潜堤で連続であった波圧が、水平板によって不連続となり、その上下で伝達の位相が異なっている様子が計算できている。

以上、潜堤の消波機構に関して有限要素法による計算結果を主に考察を行ったが、さらには、波の有限振幅性の効果、とくに、砕波による効果については十分な実験データをもとに今後とも調べていく必要がある。

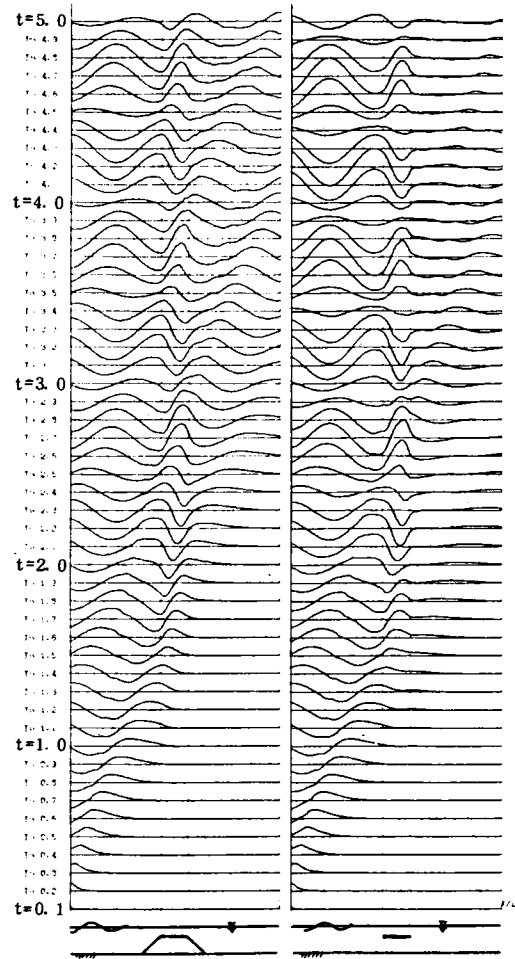
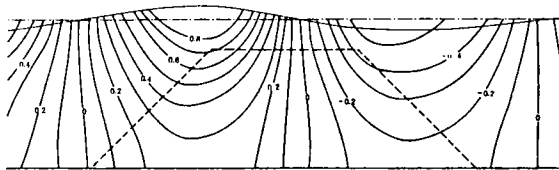
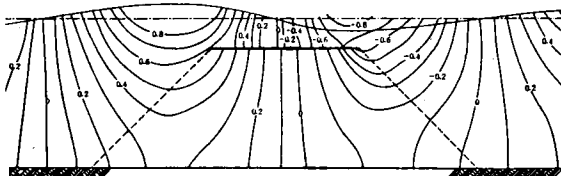


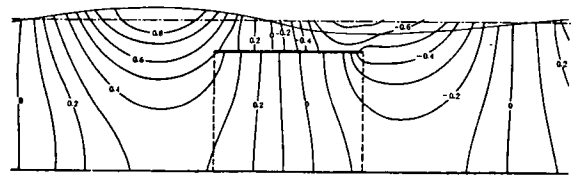
図-3.2.18 潜堤を越える波の水面変化（左は不透過潜堤右は水平板式潜堤、 $B/h=1.0$, $q=0.2$, $\sigma^2 h/g=0.36$, 入射波の波形勾配 $H_0/L_0=0.0005$ ）



(a) 透過潜堤 ($S=1$, $\mu/\sigma=1.0$, $\epsilon=0.5$)



(b) 水平板式潜堤 (plate 1枚, $S=1$, $\mu/\sigma=1.0$, $\epsilon=0.5$)



(c) 水平板式潜堤 (plate 1枚, $S=0$, $\mu/\sigma=0.2$, $\epsilon=0.9$)

図-3.2.19 潜堤の波圧 ($p/\rho g a_i$) の分布 ($B/h=1.0$, $q=0.2$, $\sigma^2 h/g=1.69$)

第3節 波による浮体の運動と波の変形に関する研究

波による浮体の運動については、従来より船舶運動学において、主として無限水深の波による船の運動として広く研究されているが、近年の海洋開発にともなって、沿岸海域への多種多様な大型の海洋構造物が設置されるようになり、有限な水深域での浮体および没水体の運動特性の解明が重要な課題となっている。

このような浅海域での浮体問題に対する理論的な研究として、微小振幅運動の仮定のもとに、領域分割法^{14), 15)}や特異点分布法^{16), 17)}また、有限要素法^{18), 19)}および Green 公式による境界積分法^{8), 20)}などがある。これらの解析法のうち、領域分割法および特異点分布法は複雑な形状の浮体あるいは水底形状の変化などに対する取り扱いが困難であるが、有限要素法および Green 公式を用いる方法は複雑な境界形状の場合にも適用され、浅海域での波と浮体の運動解析に有効に利用できると思われる。

しかしながら、浅海域での波の運動は、有限振幅性の出現など複雑な非線形現象であって、とくに、浮体との相互運動を考える場合には、波と浮体の相互運動の有限振幅性を考慮した取り扱いが重要であるにもかかわらず、従来の研究は、微小振幅波による浮体の微小な運動を対象とした研究が主で、相互運動の非線形性に関する系統的な研究はほとんど見受けられない。

そこで、本研究は、この浅海域での波と浮体の相互作用系に着目し、有限振幅波による浮体の有限振幅運動および浮体運動による波の変形について、実験および第2章において著者が示した有限要素法による解析手法を拡張し、この相互運動系の特性を明らかにしようとするものである。

ここに示す有限要素法による有限振幅運動系の計算方法は、相互運動系に対し、これを速度ポテンシャルを有する2次元波動の境界値問題として取り扱うもので、浮体の没水表面での速度ポテンシャルを浮体運動の未知な有限の変位量の関数として表現し、これに浮体運動条件と浮体没水表面の幾可学的条件とを同時に満足する解を逐次求めていく非定常な連成運動系（物体運動に応じた移動境界値問題）としての計算方法である。

従来の浮体運動の研究においては、浮体に作用する波による力を入射波による exciting force と浮体の運動により生ずる radiation force に分けて運動方程式を構成するため、浮体の各種運動形式（2次元では水平、鉛直および回転の各運動）に対応する付加質量と減衰力をあらかじめ求めておく必要があり、これらを用いて剛体としての浮体運動を調べる方法が多い。これに対して、本計算法では、上述のように速度ポテンシャルで表現された流体運動と浮体運動の方程式に対して、これを連成運動系とした取り扱いにより解析するものであり、付加質量や減衰力を別に求めておく必要はなく、考える入射波による浮体運動あるいは浮体運動による波の発生などを同様にして求めることができる。

本節では、まず、流体と浮体の相互運動系において、運動の微小振幅および有限振幅運動の両者についての有限要素法による解析方法を示し、ついで、物体の強制運動による発生波（radiation wave）について、実験および数値計算結果をもとにその特性を検討する。さらに、矩形断面浮体を例として、波と浮体相互の有限振幅運動による運動特性について実験および数値計算をもとに検討を行う。

(1) 有限要素法による波と浮体の相互運動系の解析法

a) 有限振幅運動系の解析法

図-3.3.1に示すように、浅海域に係留または浮遊した任意形状の物体があるとき、波および物体の有限な運動系について考える。この時、解析領域 V は、水面変動量 $\eta(x, t)$ および物体の没水表面によって決定される時刻によって変動する領域である。図のように座標系をとるものとし、また、流体は速度ポテンシャル Φ を有するものとする、流体運動の支配方程式は各境界領域で以下のように表現される。

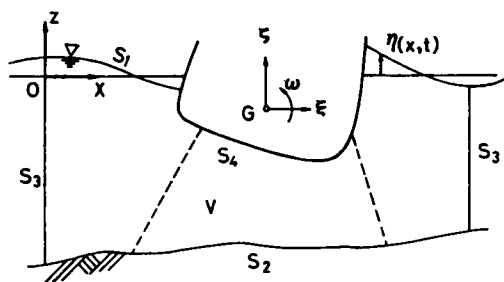


図-3.3.1 解析領域

$$\text{解析領域 } V \text{ 内； } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.1)$$

$$\text{自由表面 } S_1 \text{； } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (3.3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.3)$$

$$\text{不透過境界 } S_2 \text{； } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.4)$$

$$\text{仮想境界 } S_3 \text{； } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (3.3.5)$$

$$\text{物体没水表面 } S_4 \text{； } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (3.3.6)$$

ここで、 n は外向法線方向、 n_z は n の z 軸方向余弦である。式(3.3.5)の $\bar{\Phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味し、式(3.3.6)の右辺は物体没水表面の速度の法線方向成分である。

運動する境界面を含む有限振幅波の運動は上式で示される境界値問題であり、前述の第2章第3節で述べた有限振幅波の基礎式に、式(3.3.6)の物体没水表面での条件が付加される。これに対して、 Φ 、 η を独立変量として、

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \iint_{V \cap \eta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV + \frac{g}{2} \int_{s_1} \eta^2 dx \\ & + \int_{s_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \eta dx - \int_{s_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Phi dx - \int_{s_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \Phi dS_3 - \int_{s_4} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) \Phi dS_4 \quad \dots\dots\dots (3.3.7) \end{aligned}$$

で示す汎関数 χ を考え、これの第 1 変分をとり、結果のみを示すと、次式のようなである。

$$\begin{aligned}
 \delta \chi = & - \iint_{V \cap \eta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \delta \Phi \cdot dV + \int_{s_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \delta \Phi \cdot dS_1 \\
 & + \int_{s_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g \eta \right] \delta \eta \cdot dx \\
 & + \int_{s_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi \cdot dS_2 + \int_{s_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \delta \Phi \cdot dS_3 \\
 & + \int_{s_4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) \delta \Phi \cdot dS_4 \quad \dots\dots\dots (3.3.8)
 \end{aligned}$$

変分を受ける独立量は Φ 、 η であって、 $(\partial \Phi / \partial t)$ 、 $(\partial \eta / \partial t)$ 、 $(\partial \bar{\Phi} / \partial n)$ 、 $(\partial \Phi' / \partial n)$ は変分を取るに際しては定数と見なされる。これより、式 (3.3.7) の汎関数を停留にする条件として流体運動の基礎式がすべて得られ、この境界値問題を汎関数の停留問題として取り扱えることが示される。

ここで、ある時刻での解析領域 V を三角形要素群に分割して、1 つの要素 i 、 j 、 m 内の速度ポテンシャル Φ をその節点値 $\Phi^T = [\Phi_i, \Phi_j, \Phi_m]$ で表現すると、 Φ は x 、 z の一次式で近似され次式で表わされる。

$$\Phi = [N_i, N_j, N_m] \Phi = [N] \Phi \quad \dots\dots\dots (3.3.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \Phi = \mathbf{B}^T \Phi \quad \dots\dots\dots (3.3.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \Phi = \mathbf{C}^T \Phi \quad \dots\dots\dots (3.3.11)$$

また、境界 S_1 、 S_3 、 S_4 での諸量は次式のように三角形要素の境界上の 2 節点を用いて表現するものとし、すでに式 (2.2.13) および式 (2.3.15) で示されている。

$$\begin{aligned}
 \Phi &= [N_s] \Phi, \quad \eta = [L] \eta \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= [L] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = [L] \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \\
 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} &= [N_s] \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right\}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial n} = [N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.3.12)
 \end{aligned}$$

これらを用いると、式 (3.3.7) の汎関数は有限個の節点値で表現される。さらに、これに変分原理を適用すると、 $\delta \Phi$ 、 $\delta \eta$ に関する停留条件より次の式 (3.3.13)、式 (3.3.14) の連立方程式が得られる。

$$\sum_v (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \Phi \cdot \Delta - \sum_{s_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} - \sum_{s_3} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right\} - \sum_{s_4} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.13)$$

$$\frac{1}{2} \sum_v \Phi^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \Phi \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} + g \sum_{s_1} \mathbf{L} \eta + \sum_{s_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.14)$$

しかしながら，解析領域は独立な変関数 η の関数であり，また，物体没水表面は物体運動により決定される変位量の関数である。したがって，境界 S_1 および S_4 に関する要素の形状係数にはこの未知な変位量が含まれ，このままでは非線形な多元連立方程式を解かねばならない。そこで，増分法を導入して，これの線形化を図る。すなわち，ある時刻 t での第 n 近似解が既知であるとし，その第 $n+1$ 近似解を次のように表わす。

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= \Phi^n + d\Phi \equiv \Phi_0 + d\Phi \\ \eta^{n+1} &= \eta^n + d\eta \equiv \eta_0 + d\eta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.15)$$

これを用いて式 (3.3.13)，式 (3.3.14) 中の自由表面 S_1 に関する非線形な係数行列 \mathbf{B} ， \mathbf{C} は式 (2.3.21) と同様にして次式のように書き改められる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 d\eta, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 d\eta \quad \dots\dots\dots (3.3.16)$$

これを用いて得られる式は，境界 S_4 での項を省くと，式 (2.3.25) および式 (2.3.26) と同じである。したがって，没水表面 S_4 での Φ' が求まると， $\partial \Phi / \partial t$ ， $\partial \eta / \partial t$ の時間差分表示および仮想境界 S_3 での取り扱い方法を，第2章第3節に述べたと同様に適用すれば解析できるので，以下には，この運動する境界面 S_4 での取り扱い方法について述べる。

いま，図-3.3.1で示した運動する物体の重心の静止位置での座標を $\bar{G}(\bar{x}_G, \bar{z}_G)$ ，静止位置からの水平，鉛直および回転の各変位をそれぞれ ξ ， ζ ， ω とする。没水表面の座標 (x', z') はこれ等変位量の関数であり，一般に次式の形で表現できる。

$$\Phi'(x', z', t) = \Phi'(f(\xi, \omega), g(\zeta, \omega), t) \quad \dots\dots\dots (3.3.17)$$

物体の強制運動による波の発生問題を解析する場合には，上式中の ξ ， ζ ， ω 等が既知であるので，物体の移動位置に応じて $(\partial \Phi' / \partial n)$ が与えられ，前述の手法を用いてこれを解析することができる。

一方，波と物体との連成した運動系の場合は以下のようにする。図-3.3.2に示す没水表面に接する要素で，表面上節点 i ， j が第 n 近似解から dx ， dz だけ移動するとき，三角形 i ， j ， m の面積 Δ は第 n 次近似 Δ_0 を用いて次式で表現される。

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_0 + \frac{1}{2} [b_i, b_j, b_m] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} [c_i, c_j, c_m] dz \\ &\equiv \Delta_0 + \mathbf{Q}^T d\mathbf{x} + \mathbf{P}^T d\mathbf{z} \quad \dots\dots (3.3.18)\end{aligned}$$

ここに, $d\mathbf{x}^T = [dx_i, dx_j, 0]$, $d\mathbf{z}^T = [dz_i, dz_j, 0]$ である。

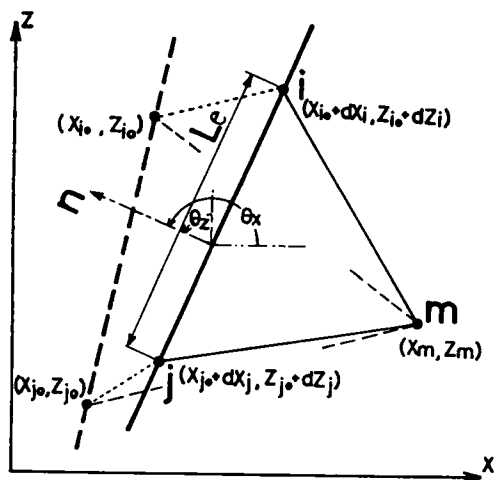
また, $b_i, b_j \dots$, および $c_i, c_j \dots$ などは第 n 近似座標で計算される値で式 (2.2.10) のようである。この面積の変動を考慮すると $\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \frac{\partial \Phi'}{\partial z}$ の計算から没水表面 S_4 に関する非線形な係数行列 \mathbf{B}, \mathbf{C} は次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_2 d\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 d\mathbf{z} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_2 d\mathbf{x} + \mathbf{C}_1 d\mathbf{z} \quad \dots\dots\dots (3.3.19)\end{aligned}$$

ここに, $\mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$ は式 (2.3.22) で計算される係数行列である。また, $\mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2 &= \frac{-1}{(2\Delta_0)^2} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{1}{2\Delta_0} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Delta_0} c_i b_i, & -1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_i b_j, & 1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_i b_m \\ 1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_j b_i, & -\frac{1}{2\Delta_0} c_j b_j, & -1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_j b_m \\ -1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_m b_i, & 1 - \frac{1}{2\Delta_0} c_m b_j, & -\frac{1}{2\Delta_0} c_m b_m \end{bmatrix} \\ &\quad \dots\dots\dots (3.3.20)\end{aligned}$$

式 (3.3.19) の移動量 $d\mathbf{x}, d\mathbf{z}$ は物体運動の変位量 ξ, ζ, ω で決まる量である。いま, 物体静止のときの重心 $\bar{G}(\bar{x}_G, \bar{z}_G)$ から (\bar{x}, \bar{z}) だけ離れた点は, 物体運動によって点 (x', z') に移動すると, これは,



図— 3.3.2 物体没水表面要素

$$\begin{aligned}x' &= \bar{x}_G + \xi + \bar{x} \cos \omega - \bar{z} \sin \omega \equiv x_0 + dx \\z' &= \bar{z}_G + \zeta + \bar{x} \sin \omega + \bar{z} \cos \omega \equiv z_0 + dz\end{aligned}\quad \cdots \cdots (3.3.21)$$

と示される。これに増分法を用いて、第 $n+1$ 近似解を第 n 近似解 ξ_0, ζ_0, ω_0 とその増分量 $d\xi, d\zeta, d\omega$ で表現すると、物体の移動量 dx, dz は次式で示される。

$$\begin{aligned}dx &= d\xi - (\bar{x} \sin \omega_0 + \bar{z} \cos \omega_0) d\omega \\dz &= d\zeta + (\bar{x} \cos \omega_0 - \bar{z} \sin \omega_0) d\omega\end{aligned}\quad \cdots \cdots (3.3.22)$$

したがって、いま図-3.3.2 のように点 i, j が物体表面にあるときには、

$$d\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} dx_i \\ dx_j \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{U}_0 d\delta, \quad d\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} dz_i \\ dz_j \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{W}_0 \cdot d\delta \quad \cdots \cdots (3.3.23)$$

ここに、

$$\begin{aligned}d\delta^T &= [d\xi, d\zeta, d\omega] \\ \mathbf{U}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\bar{x}_i \sin \omega_0 + \bar{z}_i \cos \omega_0) \\ 1 & 0 & -(\bar{x}_j \sin \omega_0 + \bar{z}_j \cos \omega_0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & (\bar{x}_i \cos \omega_0 - \bar{z}_i \sin \omega_0) \\ 0 & 1 & (\bar{x}_j \cos \omega_0 - \bar{z}_j \sin \omega_0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad \cdots \cdots (3.3.24)$$

である。上式の関係から、式(3.3.19)は

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_2 \mathbf{U}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}_0) d\delta \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_0 + (\mathbf{C}_2 \mathbf{U}_0 + \mathbf{C}_1 \mathbf{W}_0) d\delta\end{aligned}\quad \cdots \cdots (3.3.25)$$

となり、これを用いることによって、結局、没水表面での Φ' と物体の有限な変位量との関係が導入される。また、物体の幾可学的条件は、計算結果から式(3.3.21)を用いて $x' = x_0 + dx, z' = z_0 + dz$ と移動することによって同時に満足される。

次に、物体没水表面での流速 $\frac{\partial \Phi'}{\partial n}$ は u' , w' をそれぞれ x 軸および z 軸方向成分とすると、

$$\begin{aligned} u' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{x}_G + \xi + \bar{x} \cos \omega - \bar{z} \sin \omega) \\ w' &= \frac{dz'}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{z}_G + \zeta + \bar{x} \sin \omega + \bar{z} \cos \omega) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.26)$$

であって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial n} &= l_x u' + l_z w' \\ (l_x, l_z &\text{は外向き法線の } x \text{ 軸, } z \text{ 軸方向余弦}) \end{aligned}$$

より計算できる。いま、図-3.3.2の要素についてこれを表わすと

$$\left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = (l_x \cdot U + l_z \cdot W) \dot{\delta} \quad \dots\dots\dots (3.3.27)$$

ここに U , W は式 (3.3.24) の行列要素で、 ω_0 を ω としたときの係数行列である。また、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\}^T &= \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_i, \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right)_j, 0 \right], \quad \dot{\delta}^T = \left[\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \right] \\ l_x &= \cos \theta_x = (\dot{z}'_j - \dot{z}'_i) / L_e, \quad l_z = \cos \theta_z = (\dot{x}'_i - \dot{x}'_j) / L_e \\ (L_e &\text{は線分 } \overline{ij} \text{ の長さ}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.28)$$

と表現される。これに同様の増分法を適用すると、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} U &= U_0 - W_0 \cdot I_R \\ W &= W_0 + U_0 \cdot I_R \\ l_x &= l_{x0} + l_{x1} \cdot d\omega \\ l_z &= l_{z0} + l_{z1} \cdot d\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.29)$$

ここに、

$$I_R = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & d\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
l_{x0} &= (z_{j0} - z_{i0})/L_e, & l_{z0} &= (x_{i0} - x_{j0})/L_e \\
l_{x1} &= [(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \cdot \cos \omega_0 - (\bar{z}_j - \bar{z}_i) \cdot \sin \omega_0]/L_e \\
l_{z1} &= [(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \cdot \sin \omega_0 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i) \cdot \cos \omega_0]/L_e \quad \dots\dots\dots (3.330)
\end{aligned}$$

これを式(3.327)'に代入すると、結局、 $\frac{\partial \Phi'}{\partial n}$ は物体表面上の各節点で、物体変位量を用いて次式で表現される。

$$\left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = \left\{ (l_{x0} + l_{x1} \cdot d\omega)(U_0 - W_0 I_R) + (l_{z0} + l_{z1} \cdot d\omega)(W_0 + U_0 I_R) \right\} \dot{\delta} \quad \dots\dots\dots (3.331)$$

なお、 $\dot{\delta}$ に対しては、後述の時間差分を適用する。また、上式の計算で $d\omega$ などの増分量に関する2次以上の項が現われるが、これは微小な量の非線形項であるので、以下と同様にこれを無視して取り扱うものとする。

一方、係留された物体の運動方程式は、 M を物体質量、 I_G を物体の重心に関する慣性能率とすると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \int_{s_4} p_H dS_4 - F_H \\
M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \int_{s_4} p_V dS_4 - (Mg + T_V) - F_V \\
I_G \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= \int_{s_4} p_M dS_4 - F_M \quad \dots\dots\dots (3.332)
\end{aligned}$$

ここに、 F_H 、 F_V 、 F_M は係留索による各運動の抗力を意味する。 T_V は物体静止状態での索張力の鉛直方向成分である。 p_H 、 p_V は物体に作用する流体圧の水平および鉛直方向成分であり、 p_M は流体圧の物体重心に作用するモーメントである。これらの各項を以下のように表現する。

まず、流体圧 p は、物体表面の Φ' を用いて

$$p = -\rho \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)^2 \right\} + gz' \right] \quad \dots\dots\dots (3.333)$$

と表現される。この流体圧 p は考える物体表面の法線方向に作用するが、物体運動を考えるので、定義した物体運動の正方向の運動を生じさせる向きを正とする必要がある。このため、ここでは、**図-3.3.3**の(a)に示すように各没水表面要素について、節点 i 、 j を時計回り方向に付すものとして、以下のよ

うに表現する。いま、図-3.3.3(b)のような1つの没水表面要素を取り出し、線分 \overline{ij} 上の点 (x', z') に作用する流体圧の各方向成分について考える。式(3.3.33)の流体圧の各項は、節点 i, j での値を用いると

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = [N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\}, \quad g z' = g [N_s] \{ z' \}$$

..... (3.3.34)

また、動水圧項に関しては、式(3.3.26)を各節点で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)^2 \right\} &= \frac{1}{2} \{ (u')^2 + (w')^2 \} \\ &\equiv \frac{1}{2} \{ V^2 \} \end{aligned}$$

..... (3.3.35)

と表わして、 \overline{ij} 上では直線変化するものとし、これを

$$\frac{1}{2} (V')^2 \Big|_{x', z'} = [N_s] \left\{ \frac{1}{2} V^2 \right\}$$

..... (3.3.36)

と表わす。したがって、点 (x', z') の流体圧 p は

$$p(x', z') = -\rho \left[[N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\} + [N_s] \left\{ \frac{1}{2} V^2 \right\} + g [N_s] \{ z' \} \right]$$

..... (3.3.37)

と節点値を用いて表現する。

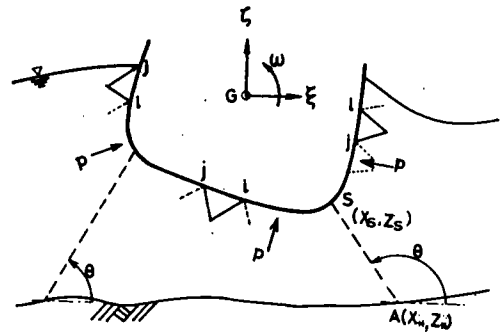
これから、流体圧の各方向成分 p_H, p_V は外向き法線の方法余弦を用いて、

$$p_H = p \cdot l_x = p (z_j - z_i) / L_e$$

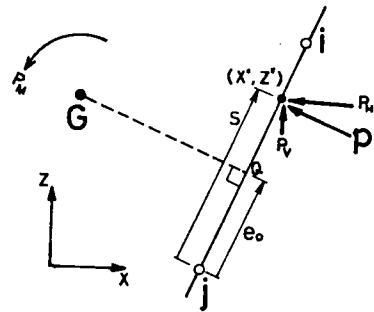
$$p_V = p \cdot l_z = p (x_i - x_j) / L_e$$

..... (3.3.38)

また、 p_M は、図-3.3.3(b)に示すように、線分 \overline{ij} 上の点 (x', z') の j 点からの距離を s 、物体重心 G から \overline{ij} 上へ下した点 Q の j 点からの距離を e_0 とすると



(a)



(b)

図-3.3.3 物体没水表面要素と流体圧

$$p_M = p \cdot (s - e_0) \quad \dots\dots\dots (3.3.39)$$

として計算されるから、式 (3.3.32) 中の流体圧の各成分ごとに同様の増分表示を行い、結果のみを示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_e p_H dS_4 &= -\rho(l_{x_0} + l_{x_1})[\bar{N}_0 + d\bar{N}] \left[\left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\} + g\{z_0\} + \left\{ \frac{1}{2} V^2 \right\} \right] - \rho(l_{x_0} + l_{x_1}) g \bar{N}_0 \mathbf{W}_0 d\delta \\ \int_e p_V dS_4 &= -\rho(l_{z_0} + l_{z_1})[\bar{N}_0 + d\bar{N}] \left[\left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\} + g\{z_0\} + \left\{ \frac{1}{2} V^2 \right\} \right] - \rho(l_{z_0} + l_{z_1}) g \bar{N}_0 \mathbf{W}_0 d\delta \\ \int_e p_M dS_4 &= -\rho[\bar{N}_{M0} + d\bar{N}_M] \left[\left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\} + g\{z_0\} + \left(\frac{L_e^2}{2} - e_0 L_e \right) \left\{ \frac{1}{2} V^2 \right\} \right] - \rho \bar{N}_{M0} \mathbf{W}_0 d\delta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.40)$$

ここに、 l_{x_0} , l_{x_1} , l_{z_0} , l_{z_1} は式 (3.3.30) に示している。

$$\text{また, } \bar{\mathbf{N}}_0 = [\bar{N}_i, \bar{N}_j] \cdot \frac{L_e}{2} \quad \bar{N}_i = \frac{1}{2\Delta_0} (a_i + b_i x_i + c_i z_i) \quad \dots\dots\dots \text{など}$$

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \bar{N}_i) \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^T \mathbf{W}) d\delta, (1 - \bar{N}_j) (\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^T \mathbf{W}_0) d\delta \right] \\ \bar{\mathbf{N}}_{M0} &= \left[\left(\frac{L_e^2}{3} - \frac{L_e}{2} e_0 \right) \bar{N}_i, \left(\frac{L_e^2}{6} - \frac{L_e}{2} e_0 \right) \bar{N}_j \right] \\ d\bar{\mathbf{N}}_M &= \left[\left(\frac{L_e^2}{3} - \frac{L_e}{2} e_0 \right) d\bar{N}_i, \left(\frac{L_e^2}{6} - \frac{L_e}{2} e_0 \right) d\bar{N}_j \right] \\ d\bar{N}_i &= \frac{1}{\Delta_0} (1 - \bar{N}_i) \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^T \mathbf{W}_0) d\delta \\ d\bar{N}_j &= \frac{1}{\Delta_0} (1 - \bar{N}_j) \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^T \mathbf{W}_0) d\delta \quad \dots\dots\dots (3.3.41) \end{aligned}$$

また、係留索の反力 F_H , F_V , F_M も、物体が有限振幅運動を行うので、これにともなう係留索の長さ、および係留角の変化を考慮する。いま、係留索は簡単のため引張りバネであるとして、そのバネ定数を \mathbf{K} とする。図-3.3.3(a)を参照して、係留索の物体への取付点 S の座標を (x_s, z_s) 、接地点を $A(x_*, z_*)$ とする。物体重心 $G(x_G, z_G)$ は、静止位置を $\bar{G}(\bar{x}_G, \bar{z}_G)$ とすると、物体運動によって

$$x_G = \bar{x}_G + \xi, \quad z_G = \bar{z}_G + \zeta, \quad \omega_G = \omega \quad \dots\dots\dots (3.3.42)$$

と表わされ、また、物体静止のとき重心 \bar{G} から (\bar{x}_s, \bar{z}_s) だけ離れた係留索の取付点 S は、物体運動

によって移動し、式 (3.3.21) と同様に次式で表現される。

$$\begin{aligned}x_s &= \bar{x}_G + \xi + \bar{x}_s \cos \omega - \bar{z}_s \sin \omega \\z_s &= \bar{z}_G + \zeta + \bar{x}_s \sin \omega + \bar{z}_s \cos \omega\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (3.3.43)$$

これらから、点Aより取付点Sまでの係留索の長さは $l = \sqrt{(x_s - x_*)^2 + (z_s - z_*)^2}$ であり、運動静止のときの長さは $l_* = \sqrt{(\bar{x}_G + \bar{x}_s - x_*)^2 + (\bar{z}_G + \bar{z}_s - z_*)^2}$ であるから、係留索の伸びは $\Delta l = l - l_*$ と計算される。

したがって、係留索の取付角 θ を x 軸を基準に反時計回りとする、これによる各運動に対する反力は次式で計算できる。

$$\begin{aligned}F_H &= K \cdot \Delta l \cdot \cos \theta \\F_V &= K \cdot \Delta l \cdot \sin \theta \\F_M &= (z_G - z_s) F_H + (x_s - x_G) F_V\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (3.3.44)$$

$$\text{ここに,} \quad \cos \theta = (x_s - x_*)/l, \quad \sin \theta = (z_s - z_*)/l$$

上式に、同様の増分表示を行い、結果を示すと次式のようなのである。ただし、添字 0 はそれぞれ第 1 近似解を意味する。

$$\begin{aligned}F_H &= K \left[\Delta l_0 \cos \theta_0 + \left\{ \frac{\Delta l_0}{l_0} (1 - \cos^2 \theta_0) + \cos^2 \theta_0 \right\} dx_s + \left(1 - \frac{\Delta l_0}{l_0} \right) \cos \theta_0 \sin \theta_0 dz_s \right] \\F_V &= K \left[\Delta l_0 \sin \theta_0 + \left\{ \frac{\Delta l_0}{l_0} (1 - \sin^2 \theta_0) + \sin^2 \theta_0 \right\} dz_s + \left(1 - \frac{\Delta l_0}{l_0} \right) \cos \theta_0 \sin \theta_0 dx_s \right] \\F_M &= -(\bar{x}_s \sin \omega_0 + \bar{z}_s \cos \omega_0) F_H + (\bar{x}_s \cos \omega_0 - \bar{z}_s \sin \omega_0) F_V \\&\quad - \left\{ \bar{x}_s \cos (\omega_0 - \theta_0) - \bar{z}_s \sin (\omega_0 - \theta_0) \right\} K \cdot \Delta l_0 \cdot d\omega\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (3.3.45)$$

ここに、

$$\begin{aligned}dx_s &= d\xi - (\bar{x}_s \sin \omega_0 + \bar{z}_s \cos \omega_0) d\omega \\dz_s &= d\zeta + (\bar{x}_s \cos \omega_0 - \bar{z}_s \sin \omega_0) d\omega\end{aligned}$$

である。上式は 1 本の係留索についての計算方法を示しているが、複数本の場合は、これを各運動成分ごとに総和して用いればよい。

次に、物体運動に伴う時間項については、簡単のため、ここでも、第 2 章第 3 節で述べた Heaviside

関数による時間差分を用いる。

速 度 項 ;

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t_0+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t \cdot \theta} [d\xi + \xi_0 - \xi_{t_0}] - \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t_0} \quad \dots\dots\dots (3.3.46)$$

ここに、 $\xi_{t_0+\Delta t} = \xi_0 + d\xi$ であって、 ξ_0 と $d\xi$ はそれぞれ、時刻 $t = t_0 + \Delta t$ での第 n 近似解およびその増分である。また添字 t_0 は $t = t_0$ (Δt 時間だけ前) での値である。さらに、加速度項についても、これと同様の時間差分

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{t_0+\Delta t} = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} \left[\frac{1}{\Delta t \cdot \theta} (d\xi + \xi_0 - \xi_{t_0}) - \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t_0} \right] - \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{t_0} \quad \dots\dots\dots (3.3.47)$$

が適用されるものとする。また、物体変位量の ζ および ω についても、上式 (3.3.46), (3.3.47) と同様の時間差分法を適用する。

以上、式 (3.3.32) の物体運動の方程式が、式 (3.3.40) の流体圧項、式 (3.3.45) の索反力項および式 (3.3.46), (3.3.47) の時間差分項の各式を用いて増分表示される。先に求めた式 (3.3.13) および式 (3.3.14) の連立方程式とこの物体運動方程式 (3.3.32) とを連成させると、結局、 $d\Phi$, $d\eta$, $d\xi$, $d\zeta$, $d\omega$ を未知量とした多元連立方程式となり、これを解くことによって、各種入射波や物体運動に応じた、有限な物体の移動量と有限振幅の波を同時に計算することができる。また、係留されていない浮遊した物体の運動は、当然ながら、式 (3.3.32) 中の索反力項を 0 とすることによって、まったく同様に計算できる。

b) 微小振幅運動系の解析法

微小な運動の物体と波動の解析に際して、解析領域 V は固定され、流体運動は式 (3.3.3) の非線形項が無視される。そこで、この場合の汎関数は次式のように考えられる。

$$\begin{aligned} \chi = & \iint_V \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \right\} dV \\ & + \frac{1}{g} \int_{s_1} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) \Phi dx - \int_{s_3} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) \Phi dS_3 - \int_{s_4} \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\right) \Phi dS_4 \quad \dots\dots\dots (3.3.48) \end{aligned}$$

この汎関数を停留にする条件によって、微小振幅運動の流体域での条件式がすべて同時に得られる。ただし、変分を受ける独立量は Φ のみであって、 $(\partial^2\Phi/\partial t^2)$, $(\partial\Phi/\partial n)$, $(\partial\Phi'/\partial n)$ は変分をとるに際しては定数と見なされる。

そこで、解析領域 V を三角形要素に分割して、この汎関数の有限要素法による離散化を行い、汎関数

の停留条件として結局次式を得る。

$$\sum_V (BB^T + CC^T) \Phi \cdot \Delta + \frac{1}{g} \sum_{s_1} S \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{s_3} S \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right\} - \sum_{s_4} S \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.49)$$

運動の周期性を考えて、 $\Phi = \phi e^{i\sigma t}$, $\bar{\Phi} = \bar{\phi} e^{i\sigma t}$, $\Phi' = \phi' e^{i\sigma t}$ なるポテンシャル関数を用いると、次式を得る。

$$\sum_V (BB^T + CC^T) \phi \cdot \Delta - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{s_1} S \phi - \sum_{s_3} S \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right\} - \sum_{s_4} S \left\{ \frac{\partial \phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.50)$$

ここで、仮想境界 S_3 での条件 $(\partial \Phi / \partial n)$ についての詳細は第2章第2節に示している。以下には簡単のため、図-3.3.4に示す矩形断面をもつ物体の場合を例として、物体没水表面 S_4 での $(\partial \Phi' / \partial n)$ の表示および物体運動の解析法について説明する。

物体重心 G の静止位置 $\bar{G}(\bar{x}_G, \bar{z}_G)$ からの水平変位、鉛直変位および回転角の複素振幅をそれぞれ ξ , ζ , ω とすると、没水表面での運動学的条件は

$$x = \pm l \text{ (A B 面, C D 面)} ;$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} = l_x \frac{\partial \phi'}{\partial x} = l_x \cdot i \cdot \sigma \{ \xi - \omega (z - \bar{z}_G) \}$$

$$z = -qh \text{ (B C 面)} ;$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} = l_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} = l_z \cdot i \cdot \sigma \{ \zeta - \omega (x - \bar{x}_G) \} \quad \dots\dots\dots (3.3.51)$$

ここに、 l_x , l_z は考える面での外向法線方向の x 軸および z 軸方向余弦を意味する。

物体の各種強制運動による波動を求める場合には、この式 (3.3.51) に従って $\partial \phi' / \partial n$ を与え、式 (3.3.50) を解けばよい。

一方、物体運動方程式は式 (3.3.32) で示されているが、図-3.3.4に示す矩形断面物体の場合には、

$$M = 2\rho' \cdot qh \cdot l, \quad I_G = \nu^2 \frac{2}{3} \rho' \cdot qh \cdot l^3 \quad \dots\dots\dots (3.3.52)$$

ここに、 ρ' は物体密度、 ν^2 は物体固有定数である。また、流体圧 p は物体没水表面上節点での値を用

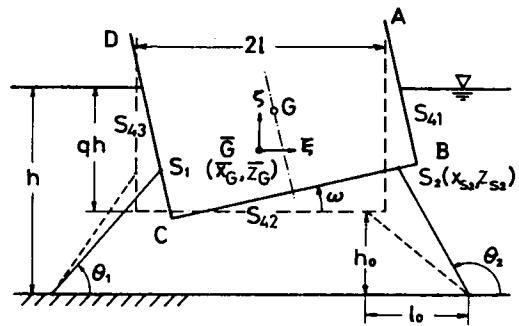


図-3.3.4 矩形断面浮体

いて表現すると,

$$p(x', z') = -\rho \left([N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} + g z \right) \quad \dots\dots\dots (3.3.53)$$

で示される。これを用いると、この場合の流体圧の各方向成分は次式のように計算される。

$$\begin{aligned} \int_{s_4} p_H dS_4 &= -\rho \left(\sum_{s_{43}} \bar{\mathbf{S}} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} + \sum_{s_{41}} \bar{\mathbf{S}} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right) \\ \int_{s_4} p_V dS_4 &= -\rho \sum_{s_{42}} \bar{\mathbf{S}} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} - 2\rho g l \cdot \eta e^{i\sigma t} \\ \int_{s_4} p_M dS_4 &= -\rho \left[\sum_{s_{41}} (\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{z}}_G) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} - \sum_{s_{43}} (\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{z}}_G) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} - \sum_{s_{42}} (\bar{\mathbf{S}} \bar{x}_G - \bar{\mathbf{Q}}) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right] \\ &\quad + 2\rho g l \left\{ \frac{1}{2} q h (qh + 2\bar{z}_G) - \frac{l^2}{3} \right\} \omega e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (3.3.54) \end{aligned}$$

$$\text{ここに, } \bar{\mathbf{S}} = \int_e [N_s] dS \quad , \quad \bar{\mathbf{P}} = \int_e [N_s] \mathbf{z} \cdot d\mathbf{z}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \int_e [N_s] \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots (3.3.55)$$

また、索の反力について、いま、物体が N 本の引張りバネで係留されているとし、そのバネ定数を \mathbf{K}_n ($n=1, 2, \dots$) とする。このとき、取付点 S_n の物体重心の静止位置からの座標を $(\bar{x}_n^s, \bar{z}_n^s)$ 、索の取付角度 (x 軸から反時計方向を正) を θ_n とすると、バネ定数 k_{xx} , k_{xz} , \dots 等は次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n \cos^2 \theta_n \\ k_{xz} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n \cos \theta_n \cdot \sin \theta_n = k_{zx} \\ k_{x\theta} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{z}_n^s \cos \theta_n) \cdot \cos \theta_n = k_{\theta x} \\ k_{zz} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n \sin^2 \theta_n \\ k_{z\theta} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{z}_n^s \cos \theta_n) \cdot \sin \theta_n = k_{\theta z} \\ k_{\theta\theta} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{z}_n^s \cos \theta_n)^2 \quad \dots\dots\dots (3.3.56) \end{aligned}$$

これを用いると、係留索による各運動の抗力 F_H , F_V , F_M は次式で計算される。

$$\begin{aligned} F_H &= k_{xx}\xi + k_{xz}\zeta + k_{x\theta}\omega \\ F_V &= k_{zx}\xi + k_{zz}\zeta + k_{z\theta}\omega \\ F_M &= k_{\theta x}\xi + k_{\theta z}\zeta + k_{\theta\theta}\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.3.57)$$

また、一本の索に作用する力 F_n は次式で計算できる。

$$F_n = \mathbf{K}_n \cdot \cos \theta_n \cdot \xi + \mathbf{K}_n \cdot \sin \theta_n \cdot \zeta + \mathbf{K}_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{z}_n^s \cos \theta_n) \omega \quad \dots\dots\dots (3.3.58)$$

以上から計算される物体運動方程式と式 (3.3.50) を連成して解くことにより、各種入射波による物体と波の微小運動を同時に求めることができる。また、自由運動をする場合には上記のバネ定数を 0 として計算すればよい。

(2) 物体強制運動による造波特性

上述の計算方法は、波と物体の相互連成運動系において、両者の微小振幅運動あるいは有限振幅運動を求めるためのものである。与えられた入射波による波と物体の運動を求める場合や物体の強制運動による発生波を求める場合には、対応する境界運動の条件を採用することによって、同様の解析プログラムにより計算することができるが、ここでは、まず、矩形断面物体が強制運動を行うときの発生波 (radiation wave) の特性について調べる。この物体強制運動による波の発生問題を理論的に取り扱ったものには、Ursell²²⁾ の方法、Black, Mei & Bray²³⁾ らの変分法を用いる方法、また、井島²⁴⁾ のポテンシャル接続法による方法などがあるが、これらの方法は、いずれも、微小振幅運動による微小波高の発生波を対象としたものであり、運動の有限振幅性を考慮した解析例は現在のところ見受けられないようである。また、実験的にも、この種の問題に対する系統的な研究は非常に少ない。

ここでは、上述の有限要素法による解析手法を用いて、矩形断面物体の強制運動 (heaving, swaying, rolling) を与えたときの造波率 K_w (発生波振幅と物体移動振幅との比) を求め、これの実験結果との比較検討をもとに、造波特性に関する考察を行う。

矩形断面物体の微小振幅強制運動による造波率 (K_{ws} ; 線形造波率) の計算結果を図-3.3.5, 図-3.3.6 および図-3.3.7 の各図に示す。

図-3.3.5 は水平運動 (swaying motion) の振幅 ξ と発生波振幅 a との比 $K_{ws} = |a/\xi|$ を入射波 $\sigma^2 h/g$ に対し計算したもので、物体の没水深 qh を変化させてある。

図-3.3.6 (a), (b) は鉛直運動 (heaving motion) 振幅 ζ と発生波振幅 a との比 $K_{ws} = |a/\zeta|$ の同様の計算結果である。(a)図は、 $l/h = 0.5$ (l ; 矩形断面物体の幅 ($2l$) の半分, h ; 水深) のときの没水深 qh による影響、また、(b)図は、 $q = 0.4$ のときの l/h による影響を示す。

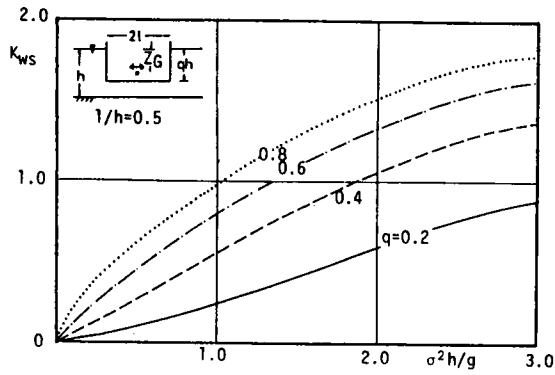
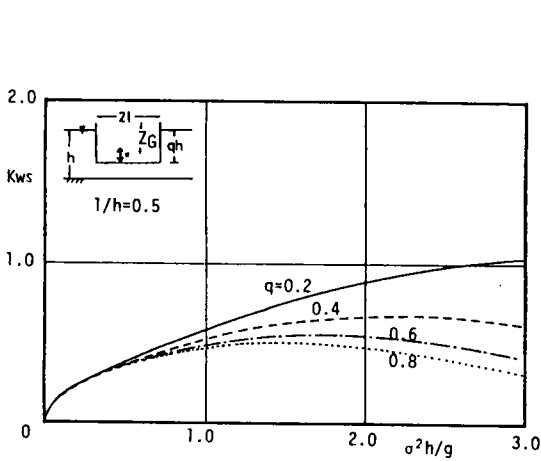
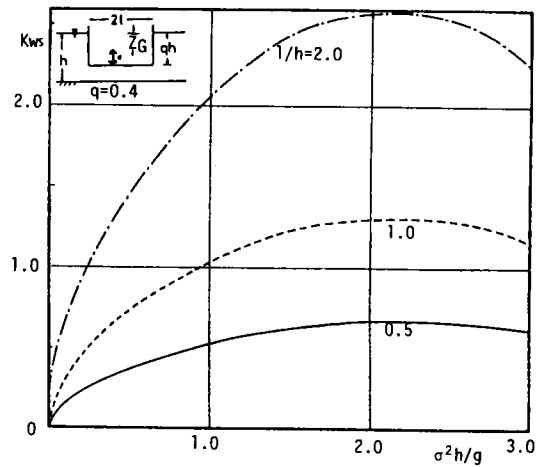


図-3.3.5 強制浮体運動造波率 (swaying)

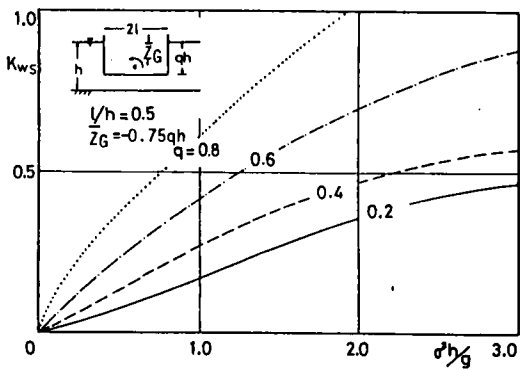


(a) きつ水深の影響

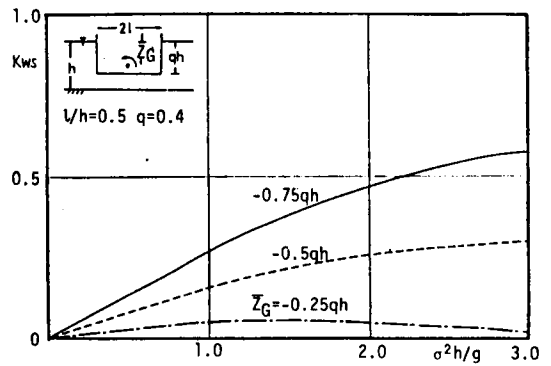


(b) 浮体幅の影響

図-3.3.6 強制浮体運動造波率 (heaving)



(a) きつ水深の影響



(b) 重心位置の影響

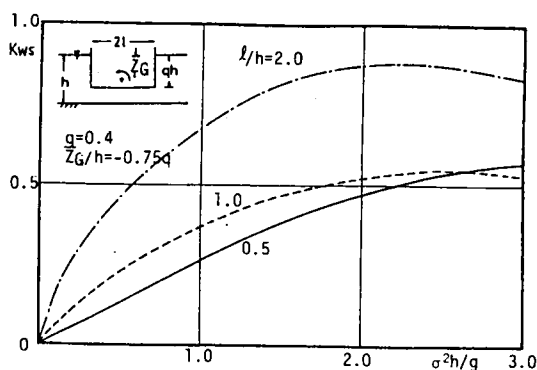
図-3.3.7 (a), (b) 強制浮体運動造波率 (rolling)

図-3.3.7 (a), (b), (c)は回転運動 (rolling motion) の振幅を ω として $K_{ws} = |a/\omega \cdot l|$ を計算したものである。(a)図は, $l/h=0.5$, 重心の静水面からの距離を $\bar{z}_G = -0.75 qh$ としたときの没水深 qh の変化による影響を示し, (b)図は, $l/h=0.5$, $q=0.4$ のときに, 重心位置 \bar{z}_G の変化による影響, (c)図は, $q=0.4$, $\bar{z}_G = -0.75 qh$ のときの物体幅 l/h の変化による影響を示したものである。

以上の微小振幅強制運動の計算結果は, 井島²⁴⁾の領域分割法 (ポテンシャル接続法) に

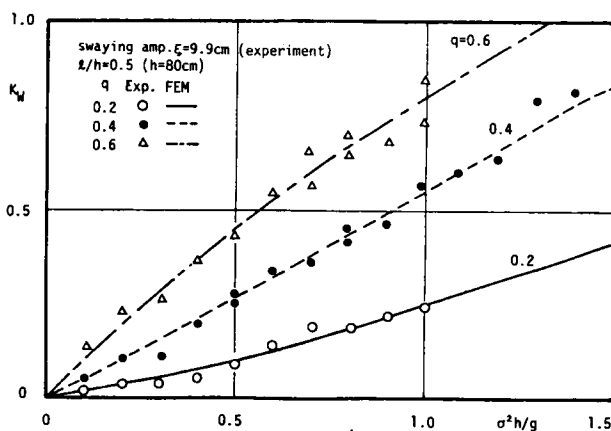
よる結果と良い一致を示すものであり, 本解析法の妥当性の間接的な検証と見ることができるが, さらに, 鉛直および水平の強制運動の実験を行って比較した結果を図-3.3.8 (a), (b) に示す。

実験は, 両端に消波装置をつけた水槽 (長さ38m, 高さ1m, 幅1m) の一端から6mの位置で, 幅 $2l=80\text{cm}$ の矩形断面を有する箱を種々の周期で強制運動させ, 箱の運動振幅と発生波高 $H=2a$ の測定を行った。図-3.3.8 (a)は $l/h=0.5$ ($h=80\text{cm}$), 水平運動振幅 $\xi=9.9\text{cm}$ を一定とし, 各運動周期を変化させた場合の造波率 $K_w = a/\xi$ をプロットしたものである。また, 図-3.3.8 (b)は, 同じ箱を用い, 鉛直運動の振幅 $\zeta=2.3\text{cm}$ のままで周期を変化させたときの造波率 $K_w = a/\zeta$ をプロットしている。上記の両ケースの実験では, 箱の運動と発生波はともに線形運動の範囲内であり, 両図からも知れるように, 対応する実験値と計算値の一致は良好であることから, 本解析の微小振幅運動解析法が有効であることが実験的にも検証できる。



(c) 浮体幅の影響

図-3.3.7 (c) 強制浮体運動造波率 (rolling)



(a) swaying

図-3.3.8 (a) 強制浮体運動

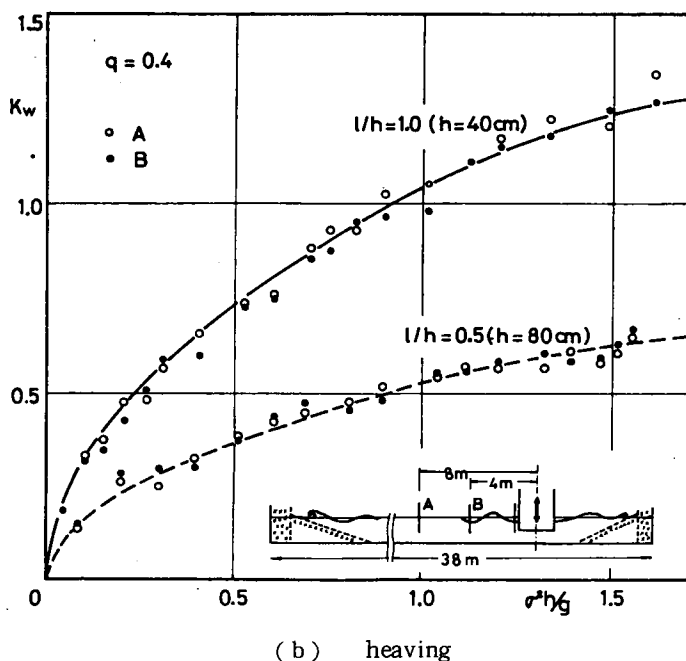


図-3.3.8 (b) 強制浮体運動

さて、物体の強制運動振幅を次第に増加させると、当然、発生波高も大となるが、このときの造波率 K_w の変化（非線形効果）を図-3.3.9に示す。図中の横軸は、物体の鉛直運動振幅 ζ を無次元化した量 $2\zeta/L$ (L ；波長)、縦軸は先に示した線形造波率 K_{ws} （微小振幅運動解析による造波率）に対する造波率 K_w の比を示す。図中○印は、実線で示した $T = 1.76 \text{ sec}$ の実験結果に対応して、本法の有限振幅運動解析法により計算した結果である。計算に際して要素の分割は水深

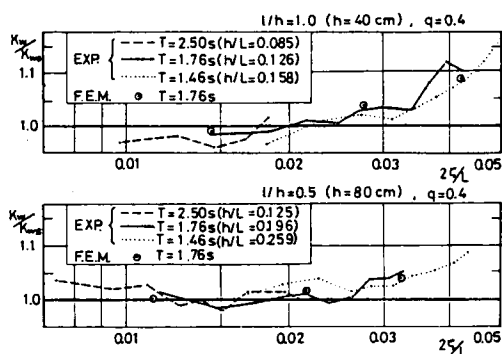
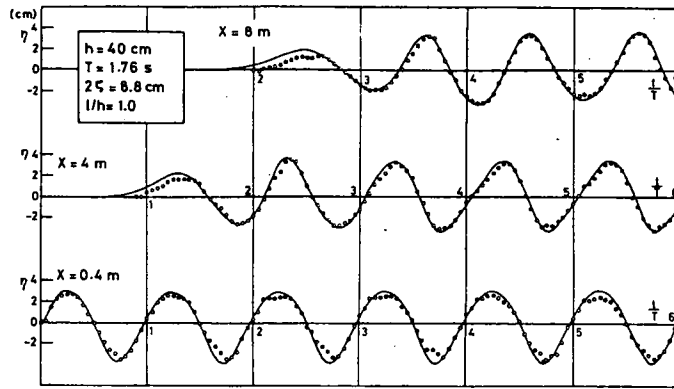


図-3.3.9 強制鉛直運動の非線形造波率

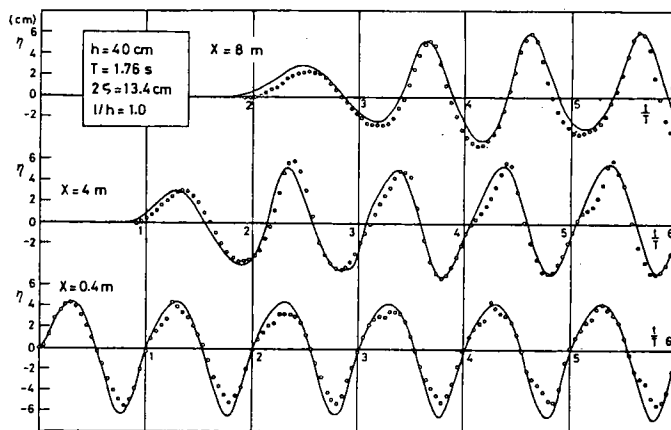
方向に10分割、 x 軸方向には、きざみ $\Delta x/L = 1/20$ として、物体の両側にはそれぞれ70および40分割し、物体底部は10分割とした。また、時間きざみ $\Delta t/T = 1/20$ 、 $\theta = 0.5$ とし計算した。

図より、物体の鉛直運動振幅 $2\zeta/L$ が増加するほど造波率も増加することが知れる。しかも、この傾向は、物体の幅 l/h および運動の周期による相違は顕著ではなく、物体の運動振幅 2ζ が発生波長 L の約2%以上 ($2\zeta/L < 0.02$) となると、その非線形効果が現われることが示され、計算結果もこれとよく一致していることがわかる。

この有限振幅運動解析の計算例より、波形および物体回りの流速分布を図-3.3.10、図-3.3.11に示

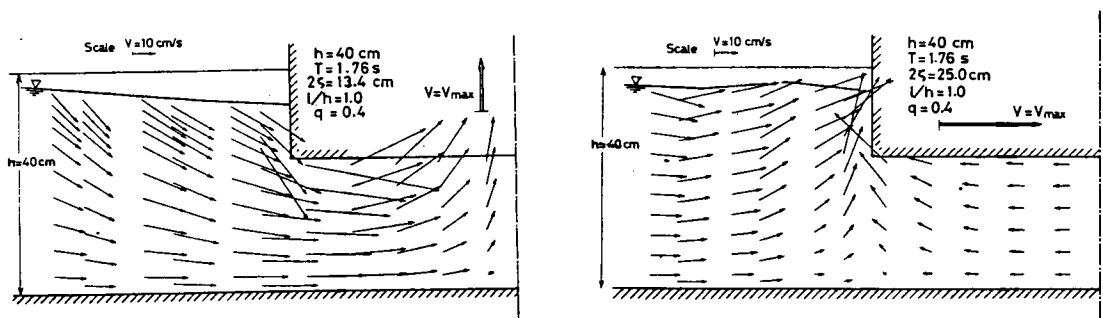


(a) $2\zeta = 8.8 \text{ cm}$



(b) $2\zeta = 13.4 \text{ cm}$

図-3.3.10 強制鉛直運動による水面波形



(a) 強制鉛直運動

(b) 強制水平運動

図-3.3.11 強制運動の流速分布

す。図-3.3.10 (a), (b) には、対応する実験波形を○印で示している。時間波形は、図-3.3.8(b)の図中にも示しているように、矩形断面物体の中心から $x = 0.4 \text{ m}$ (物体鉛直面), $x = 4 \text{ m}$ および $x = 8 \text{ m}$ の地点での波形を物体鉛直運動開始の時刻 $t/T = 0.0$ から $t/T = 6.0$ まで示したものである。これから各点での波形および波高とも計算と実験結果とが良く一致していることが示される。

ところで、先の図-3.3.9に見られる造波特性で、物体の鉛直運動の振幅 $2\zeta/L$ が増大するほど、造波率が増加する傾向は、運動する物体の波に対してなす仕事量が、物体の運動振幅に関し線形でないことを意味し、これは、図-3.3.10で示されるように、造られた波の波形が物体近傍では波の峯が偏平で、谷が急峻ならば、同じ波高をもつ正弦波よりも大きなエネルギーを持つ形をとっていることからわかる。図-3.3.9の実験範囲では、波の有限振幅性による波高増加は、ストークス波の3次項の寄与による波高増加を計算すると1%以下であって、同図の造波率にはほとんど影響しない。したがって、この造波率の非線形効果は、物体と波の相互運動の有限振幅性に基因するものと考えられ、このことはまた、波により浮体が運動する場合、線形理論計算では、その共振周波数付近で浮体の運動を大きく見積る原因が、乱れによるエネルギー散逸のみでは説明できず、浮体の運動の非線形性も考慮しなければならないことを示している。

(3) 波による矩形断面浮体の運動と波の変形

波と浮体との相互運動系の問題について、本節(2)では、物体の各種強制運動による造波特性について検討し、とくに、強制運動の振幅が増加すると、造波率に非線形効果が現われ、これが運動の有限振幅性に基因するものであることを明らかにした。

ここでは、入射波を与えたときの波と物体の相互運動問題として、矩形断面を有する2次元浮体を取り上げ、この運動特性について検討を行う。

まず、係留した矩形浮体の実験を行って、本計算法の妥当性を検討し、ついで、本計算による結果をもとに、各種入射波に対する矩形断面浮体の自由運動および係留運動の特性を明らかにする。さらに、波と浮体の両者の運動が大となると、特に共振周波数近傍での運動の非線形特性について調べ、矩形断面浮体の運動特性について考察する。

本解析法の検証実験として、図-3.3.12に示す矩形断面浮体のバネ係留による装置を用いて実験を行った。浮体の諸元を表-3.3.1に示す。浮体は木製で、重心位置および係留バネの初期張力を調節するために、砂を木箱の中に入れた。係留バネの定数を図-3.3.12の図中に示す。実験は長さ38m、幅1m、高さ1mの2次元造波水槽を用いて、水深 $h = 40\text{cm}$ とした。波高は容量式波高計を用いて測定し、また、浮体の運動は、ビデオ装置によって収録し、これを読み取り解析した。

各種の入射波周期に対する実験結果をプロットして図-3.3.13、図-3.3.14に示す。図中の各実線が本解析法の微小振幅運動解析による計算結果である。実験での入射波波高 $H(2a)$ は $2.0 \sim 4.5 \text{ cm}$ の範囲にあって、これによる浮体の運動もある程度の有限振幅運動をし、微小振幅運動とは言いがたいが、

計算および実験結果の一致は満足すべきものであると思われる。なお、実験における反射率の測定は Healy の方法による結果である。これらの結果より、波および浮体運動の振幅が小さく、流体粘性に基因する流体抵抗が無視できて、速度ポテンシャルの存在を仮定できる場合には、本解析法の微小振幅運動系に対する解析法が十分有効であることが実験的にも検証される。

次に、この解析方法を用いて、進行する波中で矩形断面浮体の自由運動および繋留運動系の計算を行い、その結果を図-3.3.15、図-3.3.16の各図に示す。

図-3.3.15 は図中に示すように、幅 $2l$ 、きつ水 qh の矩形断面をもつ自由浮体で、 $l/h =$

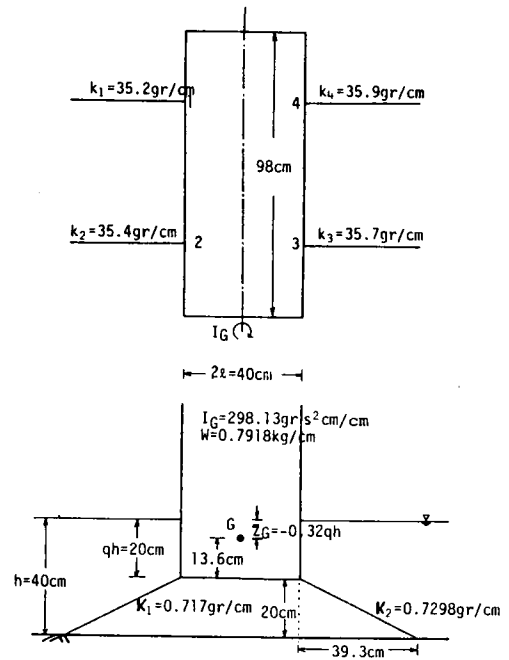
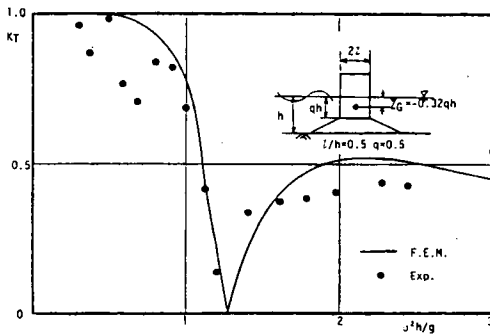


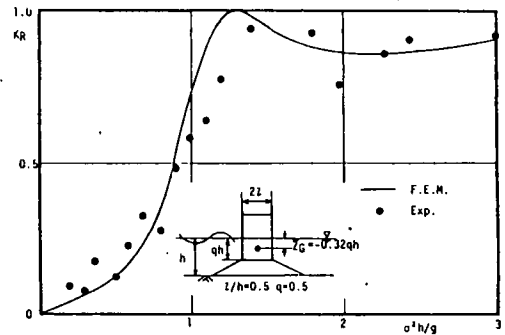
図-3.3.12 浮体模型

表-3.3.1 浮体諸元

浮体幅 ($2l$)	40 cm	重量 (W)	0.7918 kg/cm
きつ水深 (qh)	20 cm, $q=0.5$	慣性モーメント (I_G)	298.13 grs ² cm/cm
重心 \bar{Z}_G	-6.4 cm	初期係留力 (T_V)	8.163 gr/cm

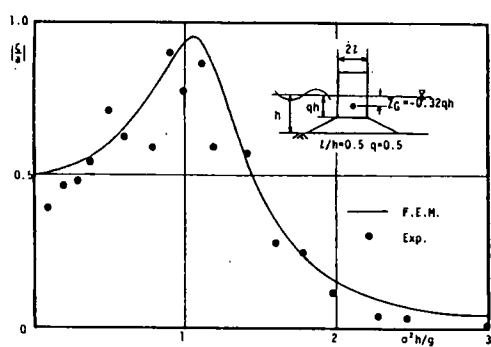


(a) 通過率

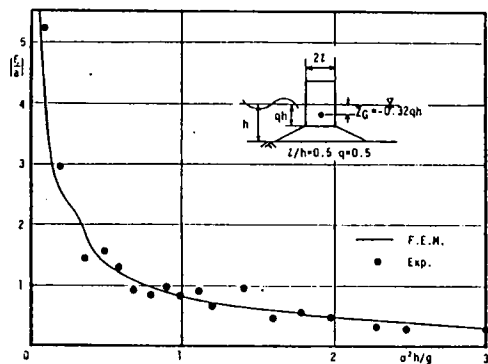


(b) 反射率

図-3.3.13 (a), (b) 係留浮体運動 (open spring)

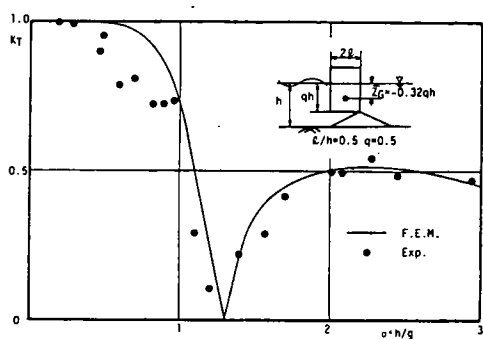


(c) 鉛直運動

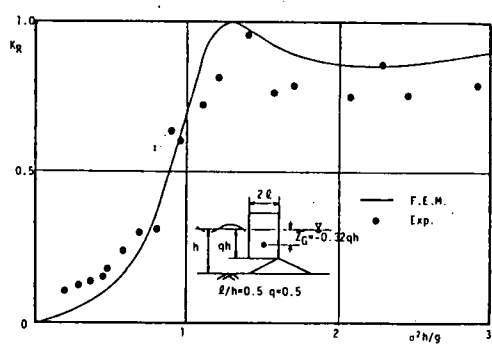


(d) 水平運動

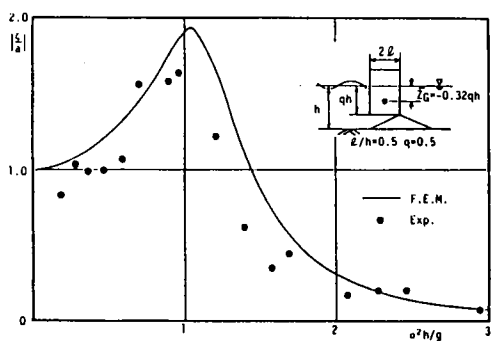
圖-3.3.13 (c), (d) 係留浮体運動 (open spring)



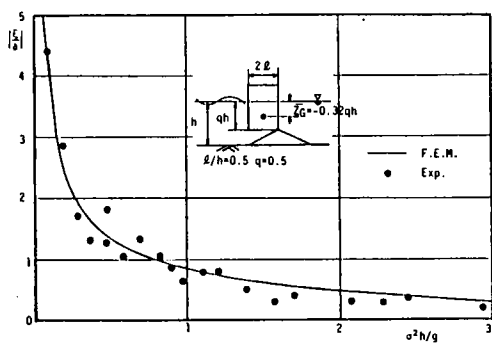
(a) 通過率



(b) 反射率



(c) 鉛直運動

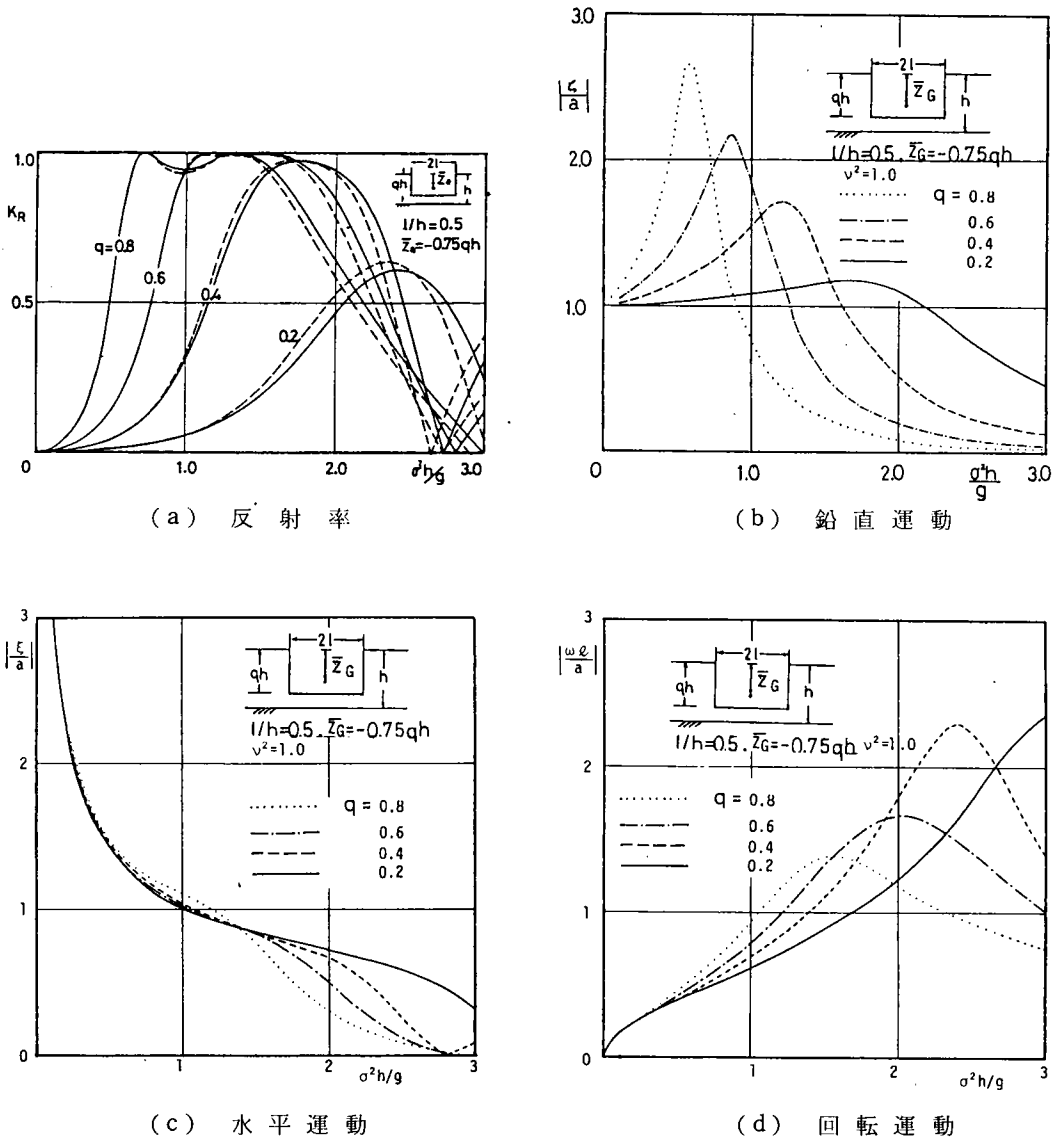


(d) 水平運動

圖-3.3.14 (a), (b), (c), (d) 係留浮体運動 (片係留)

0.5 のとき、重心 G が水面より $-0.75qh$ の深さにある場合の反射率を(a)図、また、鉛直、水平および回転の運動の振幅比をそれぞれ(b), (c), (d)の各図に示す。計算の際の要素の分割は、水深方向に10分割し、 x 軸方向（水平方向）には浮体底面を20分割、浮体の両側にそれぞれ50分割している。(a)図の破線は井島の方法¹⁴⁾による計算結果であり、これと同様に入射波の周期に対応して浮体運動が計算できることが示され、これらの図から、矩形断面の自由浮体運動に関して次のような特性が考察される。

(a)図の反射率について、これは入射波と浮体運動により発生する波との位相差および振幅によって決まり、ある特定の周波数をもつ入射波による運動系では、 $K_r = 1$ あるいは $K_r = 0$ の状態が現われる。



図—3.3.15 (a), (b), (c), (d) 自由浮体運動

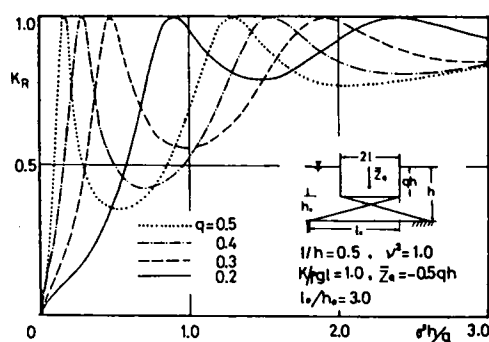
また、きつ水深の変化による効果は、 q が大となるほど、反射効果は大となり、かつ低周波側にその最大点をもつようになる。

(b)図の鉛直運動の振幅比 $|\zeta/a|$ (a は入射波の振幅) は、先に述べた浮体運動方程式からも明らかに、浮体運動の水平および回転運動とは無関係に起こり、最大の振幅比を示す周波数は、きつ水が大きいほど低周波側となり、かつその値も大となる。

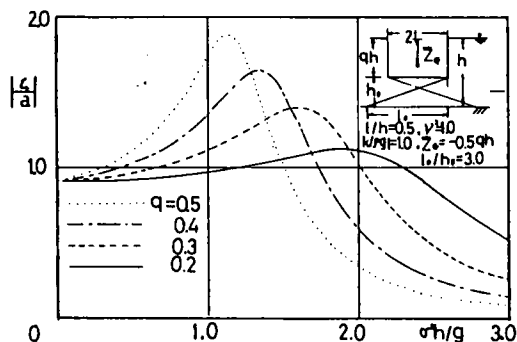
(c)図の水平運動の振幅比 $|\xi/a|$ は、浮体部分の実質流体の水平移動量で支配され、入射波の周波数とともに減少し、特定の周波数で0となる状態が出現する。

(d)図の回転運動の振幅比 $|\omega l/a|$ は、運動方程式から水平運動と連成していることがわかるが、この自由浮体運動では余り顕著ではない。きつ水深の効果は、最大振幅比が出現する周波数およびその大きさの変化として現われるが、重心の位置、浮体の幅によっても複雑に変化するものと考えられる。

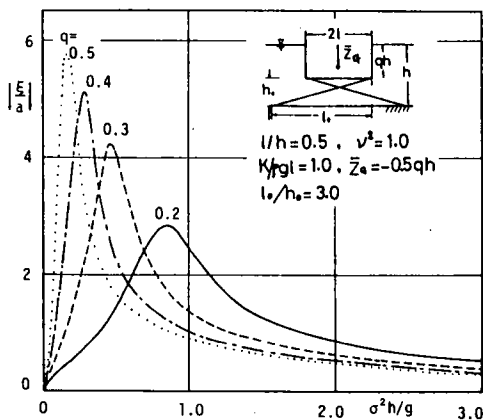
図-3.3.16 は、自由浮体を図中に示すように交叉した係留索で係留し、そのバネ定数を $K/\rho g l =$



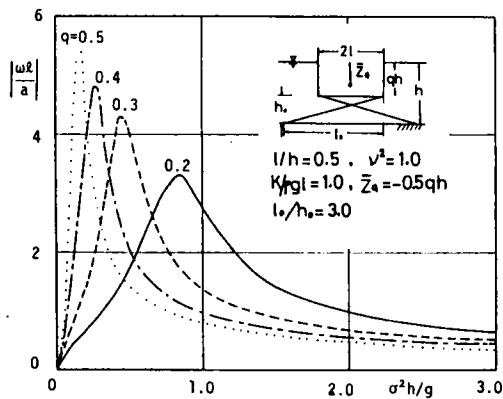
(a) 反 射 率



(b) 鉛 直 運 動

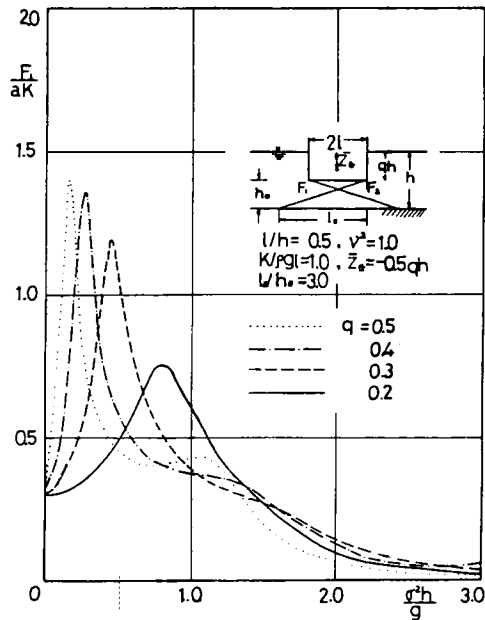


(c) 水 平 運 動



(d) 回 転 運 動

図-3.3.16 (a), (b), (c), (d) 係留浮体運動



(e) 係留力

図-3.3.16 (e) 係留浮体運動

1.0 と大きくしたときの計算結果である。 $l/h = 0.5$, $\nu^2 = 1.0$, 重心位置 $\bar{z}_G = -0.5qh$, また, バネの取り付けを図中に示すように $l_0/h_0 = 3.0$ としている。図(a)は反射率を, 図(b), (c), (d) はそれぞれ鉛直, 水平, 回転の運動の振幅比を示し, (e)は先の式(3.3.58)で計算される係留索に作用する力を, 入射側に浮体着力点をもつものについて示したものである。これらの結果も, 井島らによる結果と一致するものであって, 自由浮体の場合と異なって, 水平運動と回転運動の連成効果が顕著となり, この結果, 反射率が0となる周波数が現われなくなり, 全体として, より高い反射効果を示すようになることが示される。

上述の浮体運動の特性は, 微小振幅波による浮体の微小な運動を対象としたものであるが, 運動が有限となる場合, ことに, 共振条件近傍での浮体運動に対しては, 相互運動の有限振幅性や粘性に基因する非線形流体力の影響によって浮体運動の低減が見られるので, 微小振幅運動理論による結果は浮体運動を過大評価する。このような運動の低減に対する理論的手法としては, 浮体への作用波力をモリソン公式²⁵⁾で評価し浮体運動を求める方法, あるいは, 線形理論に粘性に基因する抗力項を導入し運動を

求める方法²¹⁾ などがある。しかしながら、これらに用いられる流体力の各係数の決定に際しては、なお不明な点が多く、理論的、実験的研究を進める必要がある。ここでは、この有限な振幅をもつ波による、有限振幅運動の浮体を対象とした実験および数値計算を行い、有限振幅の相互運動系における浮体運動の特性について考察を加える。

実験に用いた浮体の諸元は表—3.3.2 のようであり、係留索は交叉して、図—3.3.17 に示すように

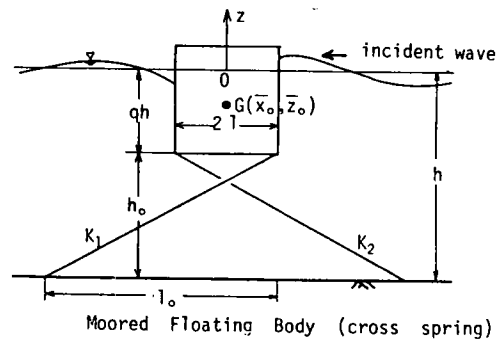
表—3.3.2 浮体諸元

浮体幅 (2l)	20 cm	重量 (W)	0.2809 kg/cm
きっすい深 (qh)	16 cm, q=0.4	慣性モーメント (I_G)	38.793 grs ² cm/cm
重心 \bar{Z}_G	-8 cm	初期係留力 (T_V)	0.0391 kg/cm

係留した。図中には、2次元模型に対する浮体の諸量 (奥行き 1 cm 当り) を記している。実験は先の浮体実験方法と同様に、水深 $h = 40$ cm, また浮体運動測定もビデオ装置を用いて収録し解析した。

図—3.3.18 に水平運動 (swaying motion) の振幅比 ξ/a , 図—3.3.19 に鉛直運動 (Heaving motion) の振幅比 ζ/a の結果を示す。両図中の実線は本解析の微小振幅運動系の解析結果である。また、実験結果は、対応する入射波の波形勾配 H_i/L (H_i ; 入射波波高, L ; 波長) をパラメータとしてプロットしている。図—3.3.19 において、○印は波形勾配 $H_i/L < 0.007$ 以下の実験値で、このときの浮体の鉛直変位 2ζ と波長 L との比 $2\zeta/L$ は 0.017 以下である。このように、入射波の波形勾配 H_i/L が小さく、浮体運動も小さい場合には、本法の微小振幅運動解析結果によく一致することが示される。

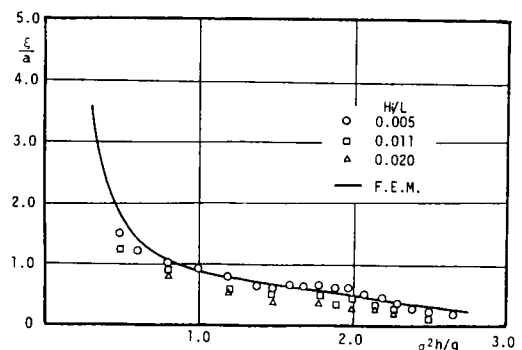
一方、 H_i/L が大となると、運動振幅 ξ/a , ζ/a とともに低減する傾向にあることが示される。図—3.3.19 の鉛直運動に対して、図中の H_i/L に対応する ζ/a を近似して破線で結び示している。このような H_i/L の増加により ζ/a が減少



Experimental Condition

$h=40$ cm, $l=10$ cm, $h_0=24$ cm, $l_0=44$ cm
 $q=0.4$
 $l/h=0.25$, $l_0/h_0=6/11$, $\bar{z}_0=-0.5qh$
 $K_1/\rho g l=0.6933$, $K_2/\rho g l=0.6943$
 $W=0.2809$ kg/cm, $I_G=38.793$ gr² cm/cm

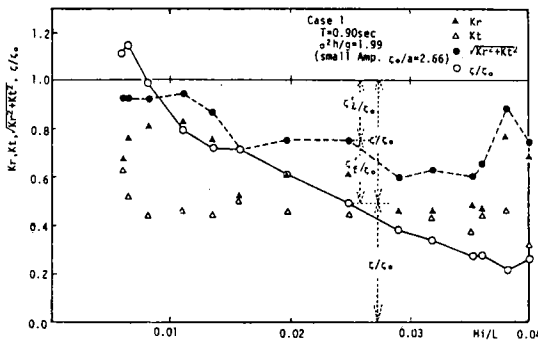
図—3.3.17 浮体模型と実験条件



図—3.3.18 有限振幅波による水平運動

する傾向は、従来、粘性に基因するエネルギー散逸によると考えられ取り扱われていたものである。しかし、先の図-3.3.9で述べた浮体の強制運動に関する実験および計算結果によると、鉛直運動の振幅比 $2\zeta/L$ が約0.02以上の運動をするときには、その非線形効果が現われることを示したが、これは、波による浮体運動を考えると、相互運動の有限振幅性も考慮する必要があることを示している。これを明らかにするため、同一周期における H_i/L の影響を図-3.3.20に示す。

図-3.3.20の(a),(b)両図は、それぞれ、



(a) Case 1

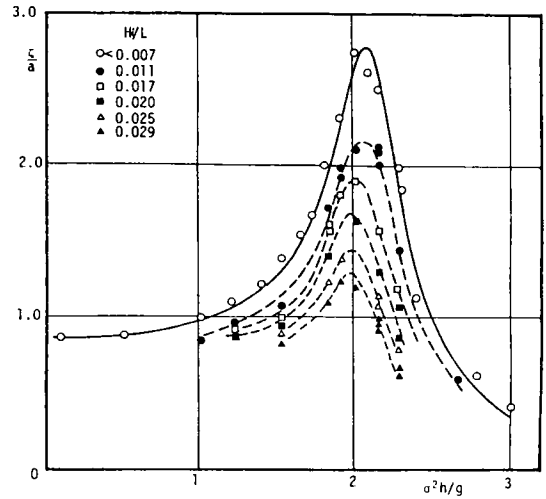
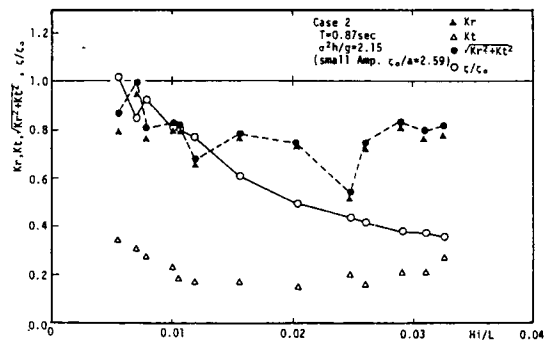


図-3.3.19 有限振幅波による鉛直運動



(b) Case 2

図-3.3.20 共振点近傍での鉛直運動振幅比の低減

Case 1 ($T = 0.9 \text{ sec}$), Case 2 ($T = 0.87 \text{ sec}$) の場合の H_i/L の変化に対する通過率 K_t (△印), 反射率 K_r (▲印) および浮体の鉛直運動比 ζ/ζ_0 (○印) (ζ_0 は本解析法による微小振幅運動解析結果) をプロットしたものである。両図から、入射波の波形勾配 H_i/L が増加すると、通過率 K_t は比較的に一定値を示すが、反射率 K_r は減少の傾向を示す。ここに、 K_r および K_t は浮体の前後に設置された波高計により波形記録を基に得られるエネルギーから算出したものである。反射率 K_r は、合田・鈴木²⁶⁾ の定義による不規則波反射率であり、また通過率 K_t は、これに対応するように、入射波と通過波のエネルギー比 $\sqrt{\eta_t^2}/\sqrt{\eta_i^2}$ により定義したものである。これは、入射波の波高増加とともに、浮体前後面での波動が浮体運動による発生波を含み、不規則性を帯びた波動となり、微小振幅波理論に基づく通常の測定法では妥当でないことと、相互運動系におけるエネルギー損失を調べる必要性から、上述の方法によるエネルギー比としての K_r , K_t の定義を用いたものである。

図中の○印は、浮体の鉛直運動振幅比 ζ/ζ_0 をプロットしたものであるが、 H_i/L の増加とともに減少する。すなわち、微小振幅運動解（常に $\zeta/\zeta_0 = 1$ ）から $1 - \zeta/\zeta_0 = \zeta'/\zeta_0$ だけ減少してこの減少量が H_i/L とともに増加することが、先の図-3.3.9の傾向と対応して示される。なお、従来は、この減少量 ζ'/ζ_0 に相当するエネルギー量 $(\zeta'/\zeta_0)^2$ が、すべて浮体周辺での摩擦や渦などによるエネルギー損失として考えられ、浮体運動の減衰項として取り扱われているものである。また、●印は、対応する H_i/L での K_t および K_r を用いて $\sqrt{K_t^2 + K_r^2}$ をプロットしたものである。

いま、この運動系に入射する波のエネルギーを E_i 、反射波および通過波のエネルギーをそれぞれ E_r 、 E_t とする。また、摩擦等によるエネルギー損失を E_l とすると、 $E_i = E_r + E_t + E_l$ の関係がある。この無次元表示を考えて、 $\sqrt{(E_i - E_l)/E_i} = \sqrt{(E_r + E_t)/E_i}$ として、これらの波動エネルギーが波高でも表現できるものと考え、実験で定義した波高によるエネルギー比 K_r 、 K_t は、 $K_r^2 = E_r/E_i$ 、 $K_t^2 = E_t/E_i$ を意味する。すなわち、 $\sqrt{(E_i - E_l)/E_i} = \sqrt{K_r^2 + K_t^2}$ であって、●印でプロットした $\sqrt{K_r^2 + K_t^2}$ は、入射エネルギーからエネルギー損失量をさし引いたエネルギー量の対波高表現である。

ここで、微小振幅波理論による浮体運動は、運動の有限振幅性はもちろん、エネルギー損失も考慮されていないものであることを考えると、この $\sqrt{K_r^2 + K_t^2}$ に相当するエネルギーを持つ入射波が浮体に作用した場合には、この入射エネルギーに対応して、浮体の運動量が決定されるものと考えられる。すなわち、図中●点に対応するエネルギーによる微小振幅浮体運動は、この点と同じ運動比を有することになる。しかし、いま、浮体の鉛直運動比 ζ/ζ_0 に関する考察を加えると、先述の微小振幅運動解からの減少比 ζ'/ζ_0 は、摩擦などによる運動の減少比 ζ'_l/ζ_0 と、それ以外の浮体運動特性による減少比 ζ'_f/ζ_0 より構成されていることがわかる。この ζ'_f/ζ_0 は、波形勾配 H_i/L が大きく、浮体の運動量が増大するに比例して増加する傾向があり、逆に H_i/L が小さい範囲では実験のばらつき範囲で小さいことがわかる。この ζ'_f/ζ_0 は運動の有限振幅性に基因する減少比と解釈することができる。このことは、従来の H_i/L にともなう浮体運動の低減 (ζ'/ζ_0) に寄与するエネルギー損失の割合は過大評価であって、浮体運動の有限振幅性をも考慮する必要があることを意味している。

図-3.3.21(a), (b) 両図は、運動の有限振幅性による浮体の鉛直運動の微小振幅運動に対する減少率 ζ'_f/ζ_0 を図-3.3.20の各図より求めて図示したものである。(a) 図中の▲印は、本法の有限振幅運動解析による計算結果である。計算結果は、実験結果ほどの減少率を示していないが、 H_i/L の増加による ζ'_f/ζ_0 の減少の傾向が計算され、これからも、浮体運動の有限振幅性による運動の低減効果を示すことができる。

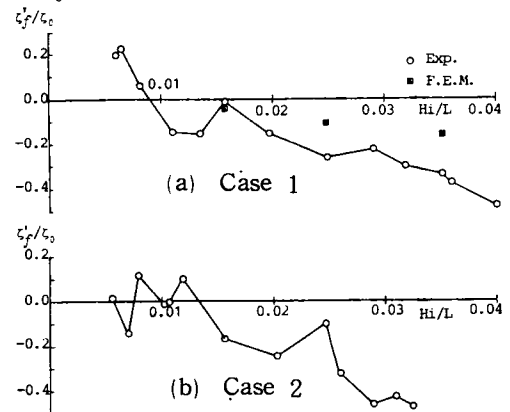


図-3.3.21 運動の有限振幅性による鉛直運動振幅比の減少率

第4節 結 語

本章では、浅海域での波と構造物の相互作用問題として、潜堤および浮体問題を取りあげ、これらの有限要素法による解析方法と計算結果を示して、相互作用系における波動特性について調べた。これによって得られた結果を各節ごとに以下に要約する。

第2節では、潜堤の消波特性について調べた。まず、透過性領域を含む浅海波の運動の解析に際しては、線形波動理論の適用により透過層の流体抵抗を線形化した等価線形抵抗係数を用い、さらに、波圧が流体および透過層の全領域を通じて連続関数であることに注目して、波圧で表現された境界値問題に対する有限要素法の適用を示した。この方法は、透過層の構成材が局所的に変化したり、流体域や透過層域が混合した場合など任意の形状および任意の境界領域に対して、要素ごとに空隙率や抵抗係数によって決定される係数を与えるのみで、全領域を同時に解析し得る方法であって、これの適用計算を行って、本解析法の妥当性の検証と実用性を示した。ついで、離岸潜堤のモデルとして、不透過潜堤、透過潜堤および干渉型潜堤を取り上げて、これらの消波機構について考察を行った。その結果、要約して以下のことが明らかとなった。

i) 不透過潜堤については、既述したように非碎波の消波効果はほとんど期待できず、堤上碎波によって通過率は支配される。堤上における碎波が完了するためには、沖波波長を L_0 とするとき、 $0.3 \sim 0.5 L_0$ 以上の堤体幅を要することとなり、現実的には、長波は、碎波で散逸可能なエネルギーを完全に失なわないまま、通過することが多い。

ii) 透過潜堤の場合は、波の有限振幅性は間接的に抵抗係数 μ/σ に取りこまれていること、また不透過潜堤に比し碎波が生じ難いことの理由で、本計算結果の適用範囲は広い。

iii) 水平板式潜堤では、干渉が生じる周波数域では、水平板下部から流出した（供給された）流体が潜堤天端上を逆流し、波高の小さい波でも碎波を生じやすく、かつ碎波形態のほとんどが巻き波碎波で、狭い堤体幅でも有効なエネルギー損失を期待できる。しかしながら、このような碎波によるエネルギー損失は反射率の低減に寄与する割合が大きく、通過率は碎波が生じても本計算による結果に近い。（通過波は高周波成分の発生により不規則波に近くなるので、実験での通過率の定義は $\sqrt{\eta^2}$ の比による）。干渉を生じない周波数域（高周波側）での碎波による消波特性は、不透過潜堤とほぼ同様である。

第3節では、波と浮体との相互運動系の問題について調べた。まず、一般的な浅海域に係留または浮遊した浮体と波との相互運動系に対して、速度ポテンシャルで表現した浮体運動の方程式と流体運動の方程式を連成して解く手法を述べて、有限要素法の移動境界値問題への適用を図り、相互運動の微小振幅および有限振幅運動の各場合についての定式化を示した。ついで、この相互運動系の特性を明らかにするために、まず、物体の各種強制運動による発生波の特性について実験および数値計算より調べた。この結果、微小振幅運動系および有限振幅運動系に対する本解析結果は実験とよく一致し、計算手法の妥当性を実証することができた。とくに、物体強制運動の振幅が増大するとき、造波率に非線形効果が現われ、これが運動の有限振幅性に基因するものであることを、実験および計算結果から明らかにした。

つぎに、係留浮体の実験を行って本計算手法の妥当性を検証するとともに、矩形断面浮体の自由運動および係留運動の特性について計算結果を示した。さらに、波と浮体の両者の運動が大となると、とくに共振周波数近傍での浮体運動の非線形特性について調べた。この結果、入射波の波高 H_i が小さく浮体運動も小さい場合には、浮体運動は微小振幅運動理論による本計算結果とよく一致するが、 H_i が増加し浮体および波の運動が大となると、浮体運動の振幅比、とくに鉛直運動の振幅比は微小振幅理論による結果よりも顕著に小さくなり、これが、入射波波形勾配 H_i/L によってほぼ同様の減少率を示すことがわかった。この減少率は、従来、粘性に基因するエネルギー逸散によるものとして取り扱われているが、これには相互運動の有限振幅性に基因する効果が含まれることを示し、従来のエネルギー逸散量の評価は過大であって、浮体運動を考える場合には、相互運動の有限振幅性を考慮する必要があることを明らかにした。

参 考 文 献

- 1) 中村充・白石英彦・佐々木泰雄：潜堤による消波について，第13回海岸工学講演会講演集，pp. 76-79, 1968.
- 2) 加藤重一・上林征男：ブロック積消波潜堤の消波効果について，土木学会論文報告集，第165号，pp. 23-30, 1969.
- 3) 永井莊七郎・小田一紀・倉田克彦：大水深緩斜面捨石潜堤に関する研究，第22回海岸工学講演会論文集，pp. 409-419, 1975.
- 4) 三浦晃・遠藤茂勝：潜堤の波高伝達特性について，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 293-296, 1978.
- 5) 井島武士・佐々木富雄：潜堤の効果に関する理論的研究，第18回海岸工学講演会論文集，pp. 141-147, 1971.
- 6) 井島武士・田淵幹修・湯村やす：潜堤の効果に関する理論的研究(2)，第19回海岸工学講演会論文集，pp. 177-183, 1971.
- 7) 井島武士・周宗仁・湯村やす：任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱，土木学会論文報告集，第225号，pp. 31-42, 1974.
- 8) 井島武士・周宗仁：グリーンの公式による2次元水面波の境界値問題の解析，土木学会論文報告集，第252号，pp. 57-71, 1976.
- 9) McCorquodale, J. A. : Wave energy dissipation in rockfill, Proc. of the 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 1885-1901, 1972.

- 10) Jarlan, G. E. : A perforated vertical wall breakwater, The Dock and Harbour Authority, Vol. XII, No. 486, pp. 394-398, April, 1961.
- 11) 樺木亨・岩田好一郎：二重透過壁を有する鉛直消波岸壁の消波効果について，土木学会論文報告集，第262号，pp. 41-54，1977.
- 12) 服部昌太郎・松本文信：水平板型透過性防波堤の水理特性，第24回海岸工学講演会論文集，pp. 266-270，1977.
- 13) 田淵幹修・滝川清：透過性構造物の流体抵抗について，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 402-406，1978.
- 14) 井島武士・田淵幹修・湯村やす：有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形，土木学会論文報告集，第202号，pp. 33-48，1972.
- 15) 井島武士：有限水深域の構造物および浮体による波の変形，1974年度水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会.
- 16) Garrison, C. J. : Hydrodynamics of large objects in the sea part 1 - Hydrodynamic Analysis, Jour. Hydronautics, Vol. 8, No. 1, pp. 5-12, 1974.
- 17) 高木幹雄：浅海域における船体運動について（その1），西部造船会会報，第50号，p. 29，1976.
- 18) 瀬戸秀幸：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究（第4報），日本造船学会論文集，第144号，pp. 91-98，1978.
- 19) Bai, K. J. : A variational method in potential flows with a free surface, Rep. No. NA 72-2, Univ. of California, Berkeley, Sept. 1972.
- 20) 井島武士・吉田明德・山本督夫：任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形，土木学会論文報告集，第272号，pp. 53-63，1978.
- 21) 渡辺晃：波による円筒形浮体の運動，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 377-381，1978.
- 22) Ursell, F. : On the heaving of a circular cylinder on the surface of a fluid, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 2, 1949.
- 23) Black, J. C., C. C. Mei and M. C. G. Bray : Radiation and scattering of water waves by rigid bodies, Jour. Fluid Mech., Vol. 46, pp. 151-164, 1971.
- 24) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，1971年度水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会.
- 25) Morison, J. R., J. W. Johnson, M. P. O'Brien and S. A. Schaaf : The forces exerted by surface waves on piles, Tech. Pub. No. 284, Petroleum Trans., AIME, Vol. 189, pp. 149-154, 1950.
- 26) Goda, Y. and Suzuki, Y. : Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments, Proc. 16th ICCE, pp. 828-845, 1976.

第 4 章 有限要素法解析による斜面上の波の碎波 変形とその内部機構に関する研究

第 1 節 概 説

沖から沿岸へ来襲する波浪は、水深の減少とともに波高の増大や波形の非対称性が著しくなり、ついには碎波となって波から流れの状態へと移行していく。このような碎波現象は、われわれの生活と密接した浅海域で起こり、そこに構築される各種の海岸・港湾構造物に作用する波圧や波の打ち上げ高、海岸底質の浮遊や物質拡散、あるいは漂砂などによる海浜変形過程などと密接に関係しており、碎波変形とその内部機構の解明は、古くから海岸工学上における最も重要な課題の 1 つである。

しかしながら、浅海域における碎波変形過程は、波の強い非線形性が出現する遷移過程であるため、その機構を理論的に取り扱って、数学的な解析解を得ることは非常に困難である。このため、碎波に関する従来の理論的研究^{1), 2), 3)}においては、碎波の内部機構に関する直接的な議論を避け、現象に対応するような碎波条件のモデル化を行って、これに一樣水深での各種の有限振幅波理論を拡大適用し、碎波変形時の波高、波速、水深などの水理諸量を求めて、実験的に得られた結果と比較検討をする方法が数多く行われてきた。これらの結果、碎波条件についての、ある程度の解明がなされてきたが、適用すべき波動理論と碎波条件の設定が不十分で、碎波機構についての十分な理論的解明はなされていない。

一方、碎波過程での内部機構解明の手がかりとして、実験的に水粒子速度を正確に知ることは不可欠な要素であるが、現象が非定常でかつ水位の変動が激しいため、碎波変形時の内部流速測定など、実験計測上の困難さの問題もあって、実験上からも碎波の内部機構について、まだ不明な点が多い。

従来、碎波点近傍の波の水粒子速度については、比較的に数多くの実験研究^{4), 5), 6)}があるが、水深減少に伴う水粒子速度などの変化特性について一般的に取り扱ったものは少なく、とくに、一樣勾配の斜面上での内部特性の変化に関して、流速の時間波形を水面波形の時間変化と関連づけた Adeyemo の実験的研究⁷⁾、Biesel⁸⁾ の理論を用いてこれを数値計算した Gaughan ら⁹⁾ の研究、岩垣・酒井らの一連の研究^{10), 11), 12)} および安田らの $K-dv$ 方程式の数値計算による研究^{13), 14)} などがあるにすぎない。これらのうち、岩垣・酒井¹¹⁾ は、斜面上で碎波する波の峯と谷の位相における水粒子速度の鉛直分布のパターンを碎波型と対応させて分類し、また、Dean¹⁵⁾ の Stream function wave theory を適用すれば水粒子速度の推定がある程度可能であることを示した。¹²⁾ 安田らは、一樣勾配の斜面上での $K-dv$ 方程式の数値計算を行って、水深減少に伴う水粒子速度の変化を調べ、¹⁴⁾ 水面波形と水粒子速度場との間に顕著な相関があることを指摘している。このように、斜面上での波の変形とその内部機構が、ある程度明らかにされてきたが、一般的な浅海域における碎波変形機構については、従来の方法では十分に推定し得るものではなく、これらの解明に際しては数値計算手法を用いざるを得ない。しかし、碎波近傍での波の強い非線形性のため、これを十分な精度で計算することも難しく、これまで、実験な

どによる十分な検証のもとに、変形過程における波の内部機構について検討した計算例は見受けられないようである。

本章では、一般的な浅海域での砕波変形とその内部機構を解明するための計算手法として、先に、第2章第3節で示した有限要素法を用いて、特に一様勾配斜面上の有限振幅波の変形解析を試みたものである。ここでは、斜面上で砕波する規則波を取りあげ、レーザー・ドップラー流速計(L.D.V.)による水粒子速度の測定をも行って、本数値シミュレーション手法の妥当性を検証するとともに、砕波に至る変形過程での水粒子速度場や加速度場などの内部機構の時間的・空間的な変化を砕波型と関連して考察するものである。

まず、第2節においては、本数値計算手法の妥当性を検証する目的で行うレーザー・ドップラー流速計(L.D.V.)を用いた実験の装置および実験方法を説明し、ついで、実験に対応した数値シミュレーションの手法について述べる。

第3節では、斜面上を進行して砕波に至る波の波形、波高、波速の変化について、実験結果との比較を行って、本計算手法の妥当性を検証するとともに、従来の各種定形波理論との比較を加えて、斜面上の波の変形特性を検討する。

第4節では、L.D.V.による内部水粒子速度の測定結果との比較を行って、本計算手法の検証を行うとともに、内部水粒子速度に対する従来の定形波理論の適用性について検討を加え、さらに、計算結果をもとに、水粒子の速度、エネルギーおよび加速度の分布の時間的・空間的な特性について、砕波型と関連して考察する。

第5節では、本章で得られた結果を要約して述べる。

第2節 斜面上の波の砕波変形に関する実験と数値計算方法

第1節で述べたように、傾斜面上で砕波する波の水粒子速度場を実験的に調べた研究は少なく、砕波変形過程の機構を解明するには十分でない。ここでは、有限要素法を用いた本数値計算方法の妥当性を検証する目的で、特に、レーザー・ドップラー流速計を用いた内部水粒子速度の測定実験を行う。また、実験に対応する数値シミュレーションの方法について述べる。

(1) 実験装置

実験は、京都大学工学部土木工学教室の地下実験室の波浪実験水槽を用いた。水槽は、長さ30m、幅50cm、高さ70cmの一部鋼製、一部ガラス張りの水槽である。水槽の一端に設置されている電気油圧式不規則波発生機を使用して、造波板のピストン運動による規則波を発生させた。実験は斜面の勾配が1/20、1/30の2種類で、斜面部の長さは、1/20勾配が約5.2m、1/30勾配が約9mである。いずれの場合も、水槽のほぼ中央部に各勾配の鋼製斜面を設置し、斜面最上端から岸側は一定水深として、斜面上で砕波し遡上した波による引き波を防ぐようにした。さらに、水槽の他端には消波装置を置いて、これ

からの反射の影響を無視できるようにした。(図-4.2.1 参照) なお, 斜面と水槽側壁とのすき間には, ビニールテープをはりつけて, すき間からの水の出入を防いだ。

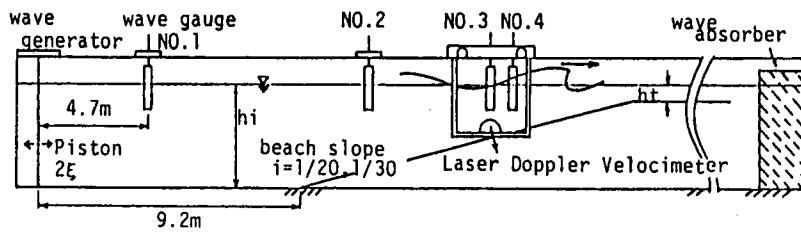


図-4.2.1 実験装置

波高計は, 容量式を用い, 一様水深部に1台, 斜面上の流速測定開始点より沖側約2mの位置に1台を固定し, また, 水粒子速度測定点の直上に1台と, これより15cmだけ岸側に離れた点の1台を測定用台車に設置した。これら4台の波高計の番号を沖から順にNo.1～No.4とする。

水粒子速度の測定には, 京都大学工学部の設備であるレーザー・ドップラー流速計(L.D.V.)を用いた。この流速計は, 日本科学工業製の光学システム8143S, 信号処理器システム8015のもので, 前方散乱型の往復流2成分が測定可能な装置である。この測定原理は, 図-4.2.2に示すように, 流体中にレーザー・ビームを3本投射し, 流体中の微小粒子によるレーザー・ビームの散乱光のドップラー・シフトを測定し, これから流速を測定しようとするものである。L.D.V.は, 探測子が光である

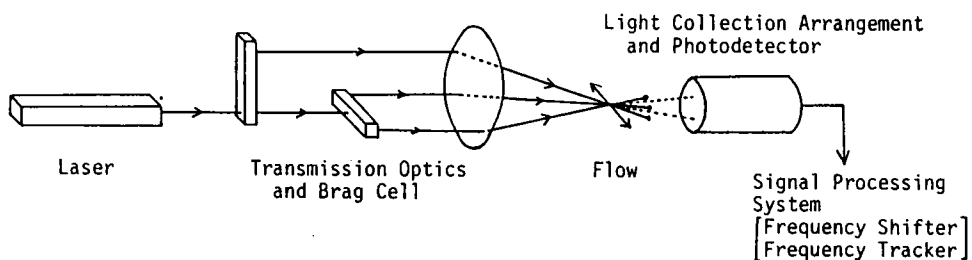


図-4.2.2 L.D.V. 装置

ため, 流れの場を乱すことがなく, また, ドップラー周波数と流速とは, レーザー光の波長と交差角のみで決まる線形関係であるため, この値を知れば検定の必要がないなど操作性, 信頼性の高い測定装置である。なお, 投射されたレーザー・ビームが空気中を通過したり, 水中の泡などによって遮断されて, レーザー・ビーム交差点での干渉じまが形成されない場合には, ドロップ・アウト信号が出力される。したがって, データの解析に際しては, このドロップ・アウト信号の検出される区間を測定記録から除去することにより, 正当な流速測定のデータを得ることができる。

これらの流速測定の記録は, 波高計の測定データとともに, データ・レコーダーによって磁気テープに同時収録した。

(2) 実験方法

実験において、入射側の一様水深部の水深 h_i は、斜面勾配 $i = 1/20$ の場合 $h_i = 35\text{cm}$ 、 $i = 1/30$ の場合では $h_i = 40\text{cm}$ とした。このとき、通過側の一様水深部の水深 h_t は、それぞれ、 $i = 1/20$ のとき $h_t = 9.3\text{cm}$ 、 $i = 1/30$ では $h_t = 10.0\text{cm}$ である。この2種類の勾配の斜面に対して、波の周期 $T = 1.0, 1.5, 2.5\text{ sec}$ の波を発生させ、それぞれの周期において、造波板の振幅 ξ を調節して、斜面上で碎波するようにした。実験ケースを表-4.2.1に示す。

表-4.2.1 実験ケース

Case	i	h_i (cm)	T(sec)	2ξ (cm)	H_o/L_o	h_b (cm)	H_b (cm)	Type
1	1/30	40.0	1.0	6.5	0.0617	14.6	10.2	S
2			1.5	9.6	0.0293	14.3	11.7	S+P
3			2.5	16.4	0.0079	14.5	12.5	P
4	1/20	35.0	1.0	6.7	0.0735	16.1	10.8	S
5			1.5	11.7	0.0272	13.7	12.5	P
6			2.5	17.4	0.0083	13.4	11.3	P

S ; Spilling breaker , P ; Plunging breaker

L.D.V. による水粒子速度の測定は、碎波点を含む約2mの区間で行い、碎波点より沖側の約1mの断面から、10cmあるいは20cm間隔の断面について、鉛直方向に2cmから3cmきざみで7～8点、実験1ケースにつき、約50～60点づつ測定した。

実験では、まず、造波板から4.7m離れた一様水深部に設置した波高計No.1によって入射波を記録し、L.D.V. による水粒子速度の測定中は、No.1以外の3台の波高計とL.D.V. からの出力を同時収録した。収録は、造波初期の数波が通過し、碎波点が安定した後の約1分間を取り、水粒子測定点が変わるたびに造波を一旦止め、静水の状態から再び造波するようにして、長時間造波による流動場の変動の影響が入らないようにした。

データ・レコーダに収録された、波高計およびL.D.V. のデータは、0.01secのサンプリング間隔でAD変換したのち、電算機で処理した。

波速は、測定用台車に設置したNo.3とNo.4の波高計間距離15cmを波の峯が通過する時間を、0.01secきざみで測定変換された収録データより求め、これにより決定した。また、波高計のNo.2は、水粒子速度測定点の波高計No.3と対応させて、測定点の位相を調べるために斜面上の位置で固定した。

なお、碎波点の位置は目視により決定したが、その位置は、spilling型碎波の場合は波峯部に気泡が発生する点とし、また plunging型碎波の場合には、峯の前面が鉛直になる点として定めた。

(3) 数値計算方法

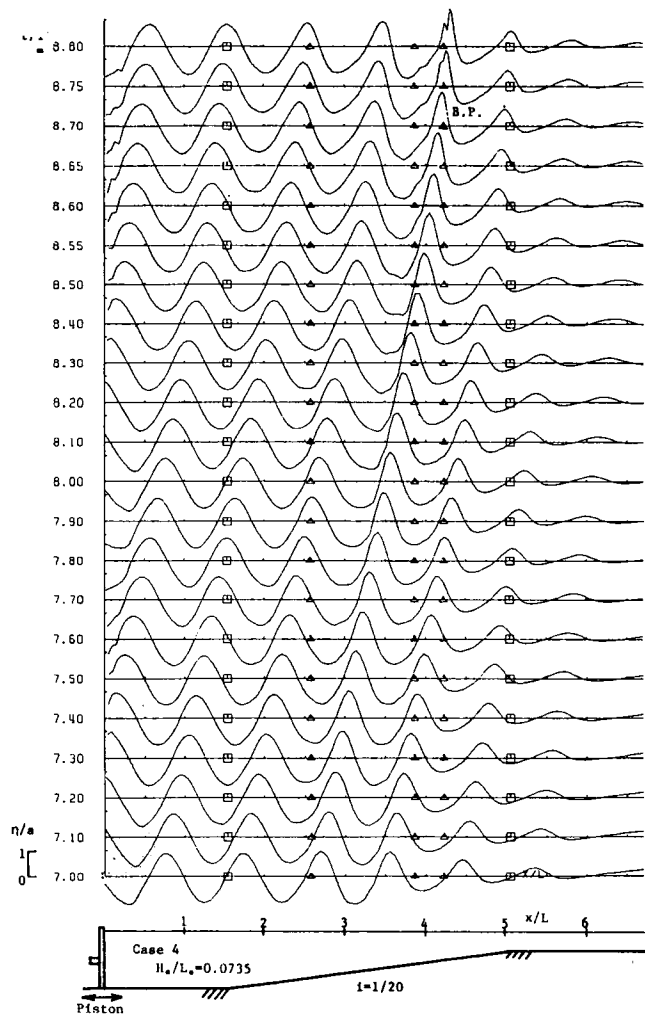
各実験ケースに対して、数値シミュレーションを試みるが、第2章第3節で述べた有限要素法による

有限振幅波の解析手法を適用する。計算を行うに際しては、図－4.2.1に示す実験状況と対応するよう計算領域を定め、また、波の入射方法も、実験のピストン型造波方式に合致する計算の入力方法を採用した。要素の分割は、水深方向に入射側一様水深部を8分割、通過側一様水深部を4分割、斜面上では漸次8～4分割となるようにし、水平方向の分割は、短波長から長波長の波に対して、きざみ $\Delta x/L_i$ (L_i ; 入射波波長) を $1/20$, $1/40$, $1/60$ とし、斜面上と斜面前後の一様水深部の約 $1.5 L_i$ 区間を解析領域とした。また、時間差分については、第2章第4節で検討しているが、時間きざみ $\Delta t/T$ は、C. F. L.条件 $(\Delta t/T)/(\Delta x/L_i) \leq 1$ を満足するように各ケースに対して決定した。計算の初期条件としては、碎波点を含む場合の適当な初期値の推定が不明であるので、ここでは静水中へ波が進入する造波直後の状態から計算を行うことにし、すべての点で0を与えて、静水状態とした。このような、斜面上の静水中への波の進行は、定常的な状態に達するまでに、初期波の碎波が起こるが、本数値シミュレーションでもこの初期碎波の状態が出現して、それ以後の計算ができなくなる。ここでは、定常的な碎波状態に対する検討を行うために、この初期状態の波を強制的に減衰させ、碎波を起こさせないで通過させるようにした。すなわち、第2章第4節(2)で述べたように、式(2.3.27)の時間差分の重み θ の効果が $\theta < 0.5$ のとき減衰効果をもつことを利用し、初期碎波点近傍で0.5から0.7までの θ の値を用い、定常的な状態となるまで、強制的に減衰させたあと、 $\theta = 0.5$ の値を用いて計算するようにした。

この計算手法を適用して求めた水面の空間波形の時間的变化を図－4.2.3.に示す。

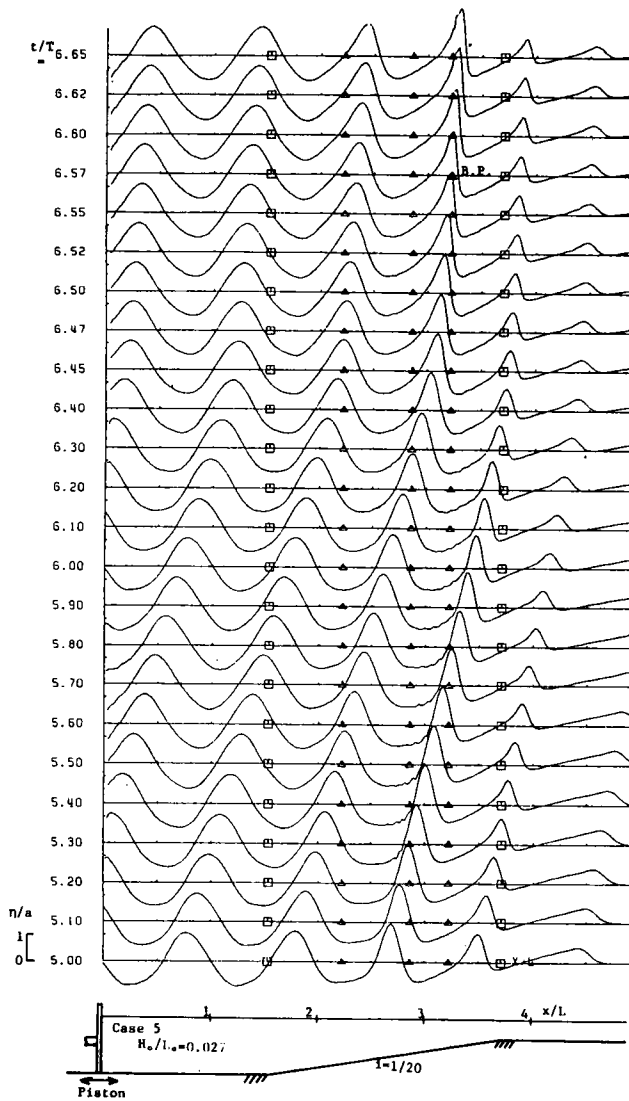
各図は、いずれも斜面勾配 $i = 1/20$ の場合のもので、(a) Case 4, (b) Case 5, (c) Case 6 に対する計算の全領域での水面波形の空間分布を時間的に示したもので、左端がピストン造波板、右端が解析境界である。これらの図で示されるように、斜面上端付近での初期波の減衰状況がわかる。また、各実験ケースに対応して波の伝播状況、斜面遡上波の変形状況と碎波形態(図中の▲は、実験での碎波点)などが計算される。これらの結果は、以下の各節で実験結果と比較され詳細に検討される。

本計算の精度は、実験結果と比較することによって十分な精度であることが実証されるが、いま、斜面上の波の変形と水粒子速度場に関する岩垣・酒井¹⁰⁾の実験結果と比較して示すと図－4.2.4, 図－4.2.5のようである。図－4.2.4の(a), (b)は斜面上での時間波形を比較したもので、本計算結果の良一致が認められる。また、図－4.2.5(a), (b), (c)は、同様に斜面上の各測定点で、水素気泡をトレーサーとして測定された、水平方向水粒子速度 u の波の峯および谷での鉛直分布の比較を行ったもので、水粒子速度は無次元量 u/\sqrt{gh} で表示してある。また、図中には、各測定点での T , 水深 h および波高 H を与えた場合の Stokes 波の第3近似解¹⁶⁾ およびクノイド波の第2近似解²⁾ による理論値を示してある。水深の減少に伴ない、一様水深に対する有限振幅波理論は次第にその適用限界をこえ、実験結果と合わなくなることがわかるが、本計算結果は、これについても十分な精度で計算できることが示される。

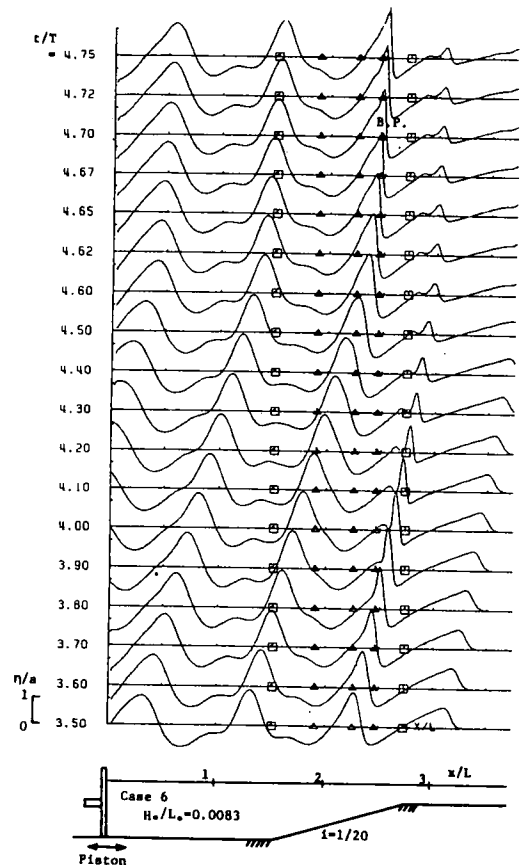


(a) Case 4

図-4.2.3 (a) 水面の空間波形の時間的变化

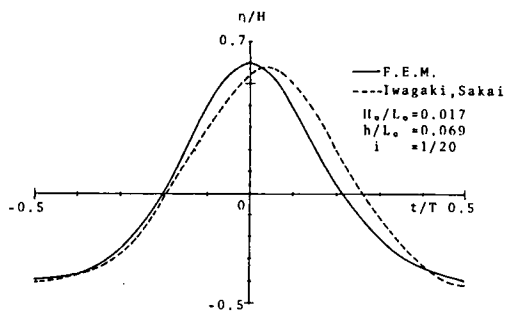


(b) Case 5

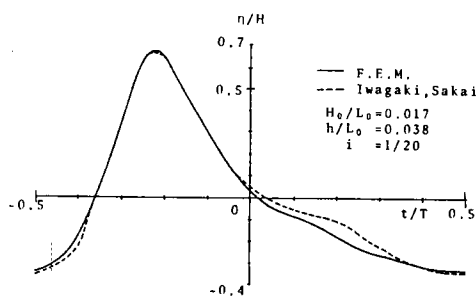


(c) Case 6

図-4.2.3 (b),(c) 水面の空間波形の時間的变化

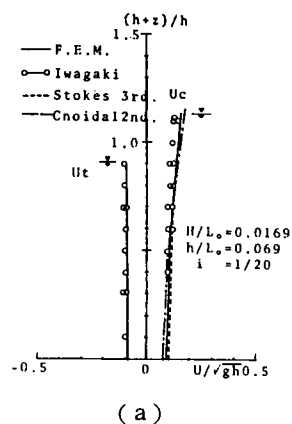


(a)

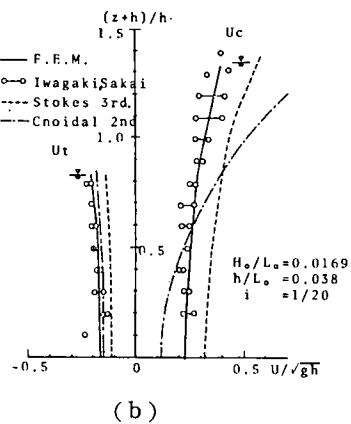


(b)

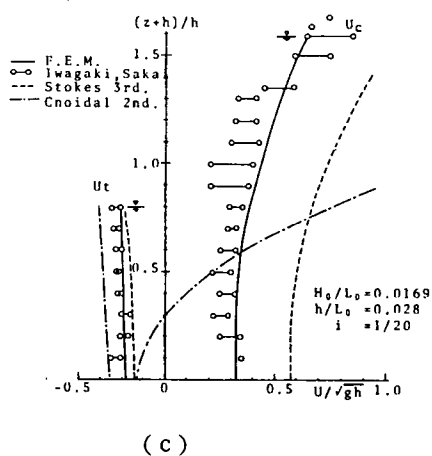
図-4.2.4 時間波形



(a)



(b)



(c)

図-4.2.5 水平方向水粒子速度の鉛直分布

第3節 水深減少に伴う波の変形と碎波に関する検討

斜面上を進行して碎波にいたる波の変形過程と、その内部機構について検討するまえに、本節では、波高、波速、水面波形などの波の諸量の変化を数値計算で求め、その結果を実験結果と比較して、本計算手法の妥当性を検証するとともに、従来の各種定形波理論との比較を加えて、斜面上の波の変形特性について考察する。

(1) 碎波指標および碎波形式の検討

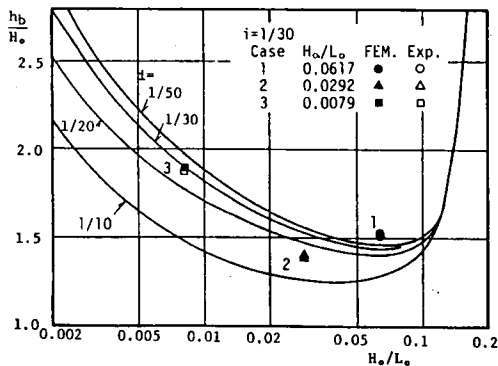
波高、波形、波速および水粒子速度の変化の結果を検討する前に、碎波点での波の水理量を示す碎波指標（Breaker Index）と碎波形式について検討する。

実験の各ケースにおいて、波の周期 T と波高計No.1で測定された一様水深部の波高 H_i から、微小振幅波理論を用いて、沖波波長 L_o 、沖波波高 H_o を求めた。表4.2.1には、このようにして求めた沖波波形勾配 H_o/L_o 、および碎波水深 h_b 、碎波波高 H_b 、碎波形式の実験結果を示している。

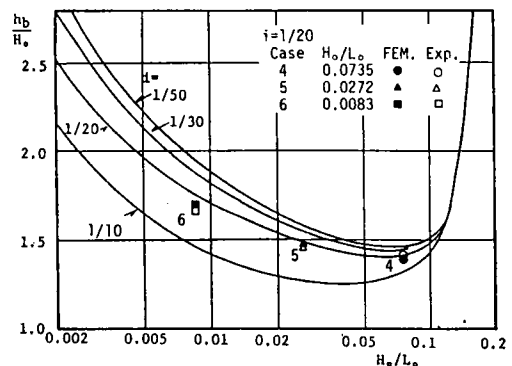
一方、数値計算における碎波点は、図4.2.3に示したように、計算の限界として波頂部付近の水面波形が不連続となる地点とし、この地点での水深、波高の値を求めこれを用いる。

各ケースの碎波水深 h_b および碎波波高 H_b を沖波波高 H_o でわり、沖波波形勾配 H_o/L_o との関係を斜面勾配 i ごとに示したのが、図4.3.1、図4.3.2であって、計算結果（F. E. M.）および実験結果（Exp.）をプロットしている。なお、図中の数字は、実験ケースの番号を示す。図中の曲線は、合田¹⁷⁾が過去の実験成果を水路側壁および底面の摩擦による波の減衰効果を補正して再整理し、山田、塩谷³⁾と岩垣ら¹⁸⁾の理論式を併用して求めた碎波指標曲線である。測定ケースが少ないので碎波指標に対する明確な検討はできないが、碎波水深 h_b/H_o は、多少のばらつきはあるが、図の(a),(b)の各斜面勾配に対して、合田の碎波指標曲線とはほぼ一致している。

また、図4.3.2の H_b/H_o は(a),(b)両図とも、沖波波形勾配 H_o/L_o が小さいほど碎波波高比

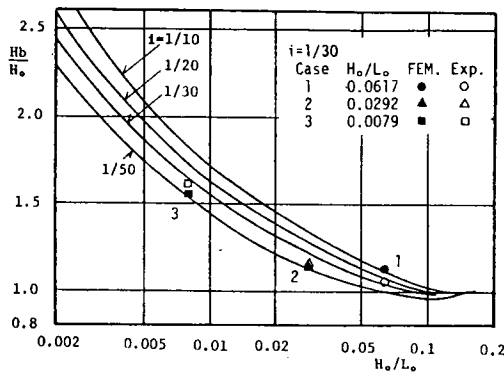


(a) $i = 1/30$

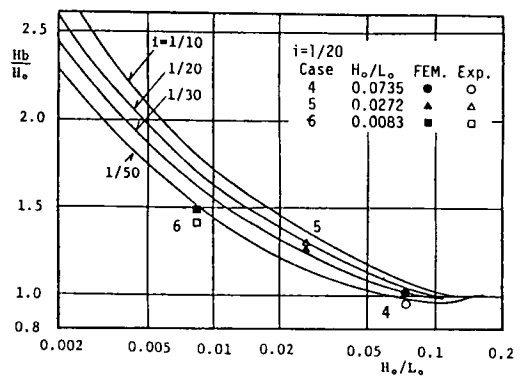


(b) $i = 1/20$

図4.3.1 碎波水深

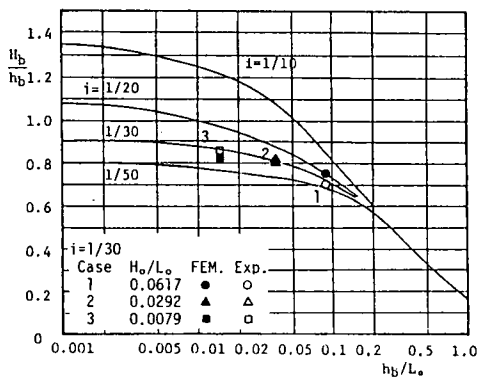


(a) $i = 1/30$

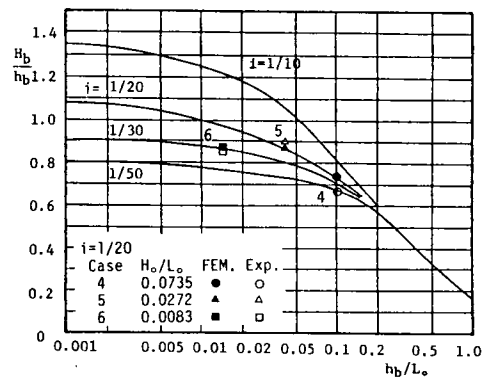


(b) $i = 1/20$

図—4.3.2 砕波波高



(a) $i = 1/30$



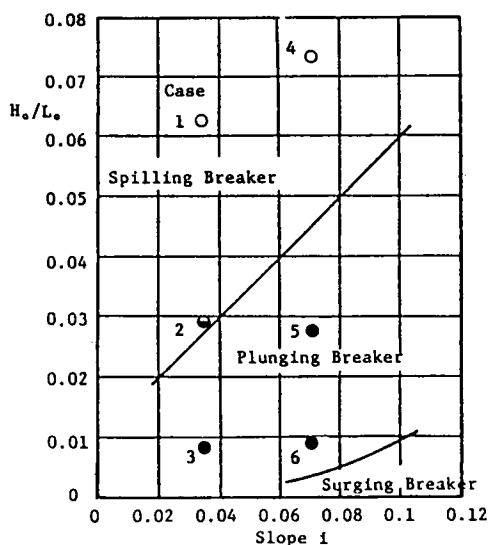
(b) $i = 1/20$

図—4.3.3 限界波高比

H_b/H_0 が大となる傾向は一致するが、斜面勾配による差異は明確でない。なお、数値計算結果は h_b/H_0 、 H_b/H_0 とともに実験結果とはほぼ一致していることが示される。

図—4.3.3の(a),(b)は、限界波高水深比 H_b/h_b を示したもので、図中の曲線は同じく合田による砕波指標曲線である。(b)図の Case 6 の場合以外は合田の曲線とはほぼ一致し、斜面勾配が大きいほど H_b/h_b が大きくなる傾向が示される。また、計算結果は実験結果と良く一致し、砕波点でのこれら特性諸量に関して十分妥当な値であることが検証される。

図—4.3.4 は、沖波波形勾配 H_0/L_0 と斜面勾配 i をとって砕波型式を示したものである。図中の○は崩れ波 (spilling breaker), ●は巻き波 (plunging breaker), ⊙は両者の中間として観察されたものである。図中の曲線は、従来砕波形式として崩れ波, 巻き波およびくだけ寄せ波の3つの形式を分類する Iversen¹⁹⁾ や速水²⁰⁾ らによるものである。本実験での砕波形態はこの分類とよく合致している。



図－4.3.4 砕波型

また，数値計算による砕波形態は，先の図－4.2.3の各ケースの波形および以下に示される各図からも，対応する実験ケースの砕波形態によく合致していることが示される。

(2) 水深減少に伴う波高・波速および波形の変化

水深減少に伴う波高変化の実験結果および数値計算結果をプロットして，図－4.3.5(a), (b)に示す。図中の曲線は酒井・Battjes²¹⁾の論文より引用したもので，破線はCokelet²²⁾の論文を用いてエネルギーフラックス法により計算された結果であり，また，一点鎖線は，首藤²³⁾が非線形長波方程式を解いて求めたものである。図から， H/H_0 (H_0 は沖波波高)は，これらの理論計算の曲線と同様，水深の減少に伴って大きくなることが知れるが，実験結果は理論曲線よりも小さい傾向にある。実験結果は多少のばらつきがあるが，本数値シミュレーション結果は，各ケースとも実験結果とよく一致していることがわかる。とくに，Case 3，Case 6の場合は，先の図－4.2.3にも示すように，入射波自体の波形が上下および前後にも非対称であり，さらに，波長に対して入射部の一様水深部および斜面の長さが1波長前後となる実験状況であって，上述の理論曲線とは同等に比較できないと考えられる。すなわち，本計算方法は，水深の変化だけでなく，造波方式などの実験状況に合わせて計算したものであるから，両者の結果より，実験を十分シミュレートした計算が行われているものと判断される。このことは，逆に，造波水槽を用いた実験と理論曲線を比較する場合には，十分に実験状況を把握した上で，その結果の評価がなされるべきであることを意味している。

水深減少に伴う波速 C/C_0 および波長 L/L_0 の変化を，図－4.3.6(a), (b)両図に示す。ここに C_0 は沖波波速， L_0 は沖波波長である。実験による波速 C の値は，第2節の実験方法で述べたように，

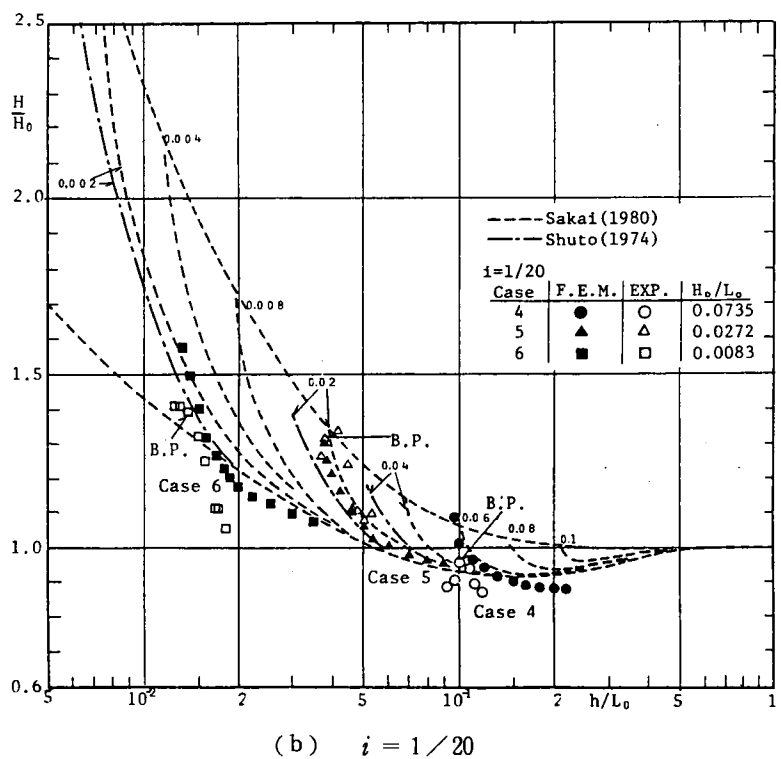
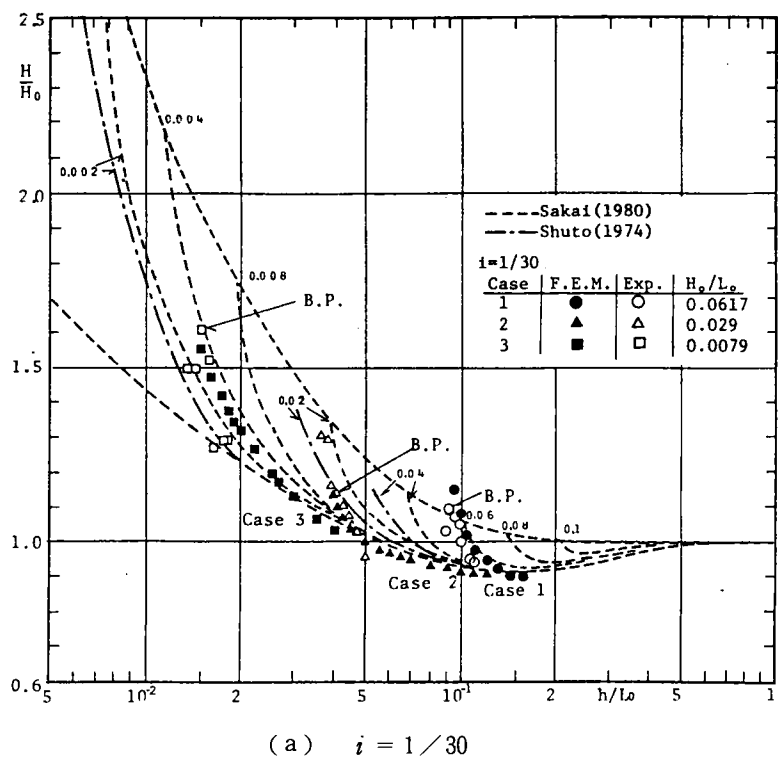
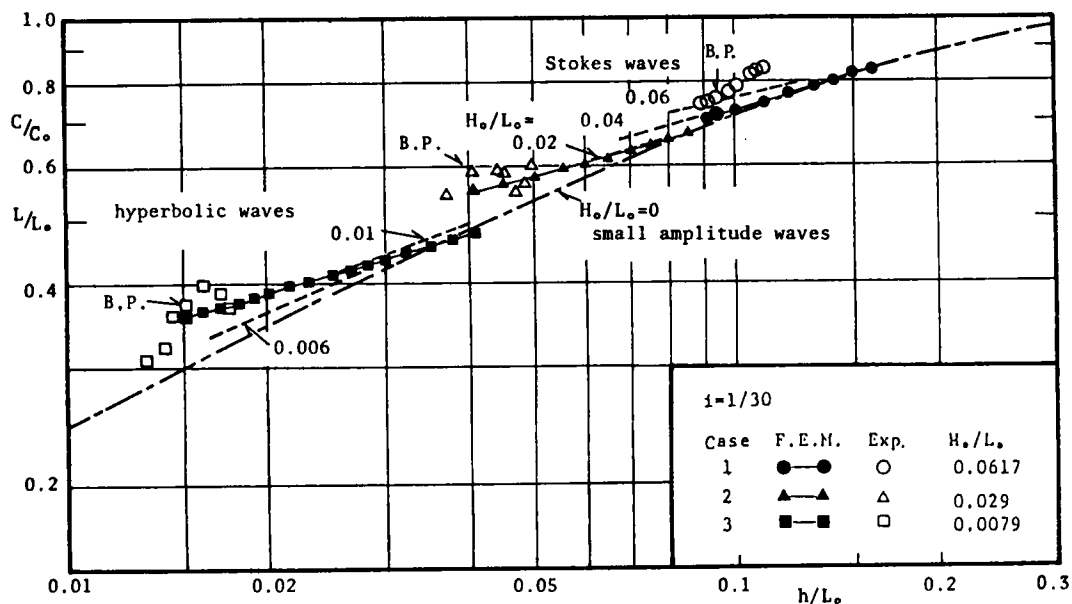
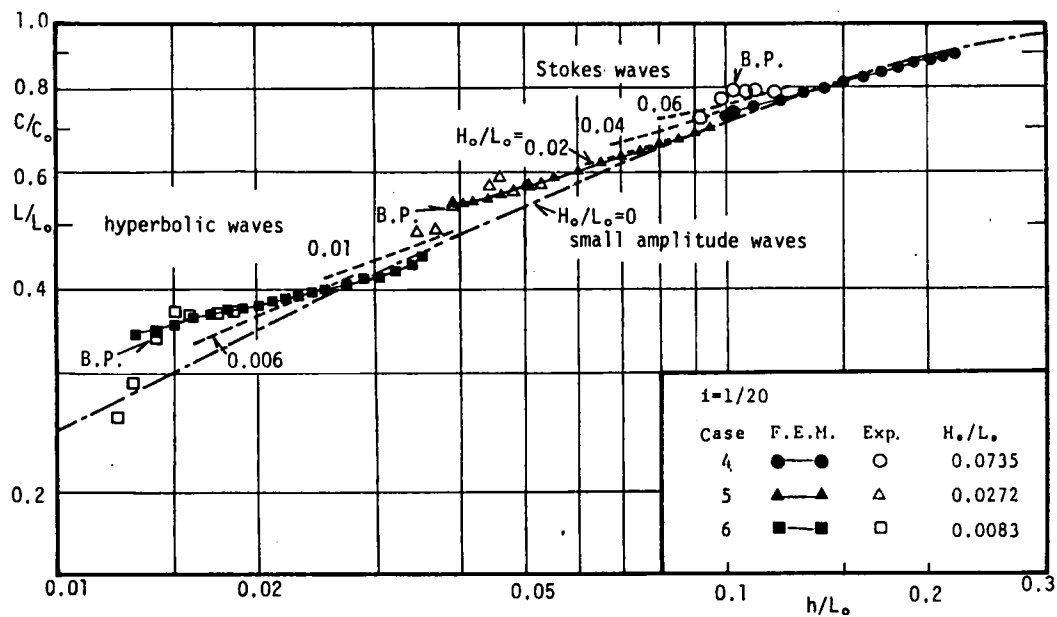


图-4.3.5 波高变化



(a) $i = 1/30$



(b) $i = 1/20$

图-4.3.6 波速变化

15cmだけ離れた2台の波高計間を波の峯が通過する時間を計測することより求め、それを両者の中間の位置での値とした。また、数値計算による波速の値は、考える波峯の波長 L を、その前後の波峯間距離の平均値と定義し、波の周期 T は変化しないとして、 $C = L/T$ より求め、考える波峯の位置での値とした。図中に示してある曲線のうち、一点鎖線は微小振幅波理論による曲線であり、破線は、岩垣・酒井¹⁸⁾が示したエネルギーフラックス法によるストークス波およびハイパボリック波の理論曲線である。実験結果はばらついているが、本計算結果は、砕波近傍（図中のB. P. 点が実験での砕波点）まで実験結果とよく一致することが示される。これらの数値計算および実験結果から、水深減少に伴って、 C/C_0 および L/L_0 は減少すること、この値は微小振幅波理論（ $H_0/L_0 = 0$ ）の場合より大となる傾向があることが、岩垣・酒井の曲線と同様に示される。沖波波形勾配 H_0/L_0 の影響も、全体的には、理論曲線と類似した傾向となるが、理論曲線との詳細な比較はデータ不足のためできない。数値計算結果によると、 H_0/L_0 の影響は、 H_0/L_0 が大きい場合には微小振幅波理論との差は小さいが、 H_0/L_0 が小さくなるとその差が大きくなることが示される。これは、 H_0/L_0 が大である Case 1 および Case 4 の場合は、崩れ波型砕波であって、水面波形が比較的対称形であること、また、 H_0/L_0 が小さい Case 3 および Case 6 の場合は、巻き波型砕波であって、水面波形の非対称性が大きな場合であることなどを考慮すると、斜面上での C/C_0 、 L/L_0 の微小振幅波理論との差異は、水面波形の非対称性と対応していることがわかる。

水深減少にともなう水面波形の変化を図一4.3.7に示す。(a), (b), (c)の各図は、それぞれ Case 4, Case 5, Case 6 の場合の砕波点近傍の各測定点での水面の時間波形であって、実験と数値計算の結果を比較したものである。(a)図の Case 4 は崩れ波型砕波、(b)および(c)図の Case 5, Case 6 は巻き波型砕波であるが、計算結果は、これらと対応しており、砕波に至る変形過程での水面の時間波形の非対称性の出現状況が良く計算されていることがわかる。この水面波形の非対称特性を表現するパラメーターとして、図一4.3.8に示すように、 η_0/H および t_c/T をとり、各実験ケースについて h/L_0 を横軸にとってその変化を示すと、図一4.3.9および図一4.3.10のようである。

図一4.3.9(a), (b)中の破線は、先と同じく、岩垣・酒井¹⁸⁾が示した、エネルギーフラックス法による η_0/H の理論曲線である。これらの図より、水深の減少にともなって、 η_0/H の値は大となり峯がしだいに鋭くなって砕波することがわかる。数値計算結果は、波高計の検定不良と思われる Case 4 を除けば、実験結果との一致は良好である。しかし、 H_0/L_0 の影響は、数値計算結果の方が理論による結果よりも水深減少による増加の割合が小さく、この傾向は、 H_0/L_0 が小さい場合ほど著しい。すなわち、図一4.3.10の各図でも示すように、砕波近傍での水面波形が、水深減少とともにしだいに前傾化することと対応して、 η_0/H の理論値との差が著しくなっており、このことは、波形の変化を考慮できない定形波理論に基づくエネルギーフラックス法の理論的取り扱いの限界を示すものと考えられる。

また、図一4.3.10は、水深減少にともなう水面波形の前後の非対称（前傾度）を t_c/T あるいは $\Delta x_c/L$ で表わし図示したものである。図中の○△□は t_c/T の実験結果で●は砕波点での値を

示す。ここに、 Δx_c は空間波形の谷から峯までの水平距離、 t_c は図-4.3.8に示すように、時間波形の谷から峯までの時間である。図中の実線が $\Delta x_c/L$ 、破線が t_c/T の数値計算結果である。これらの図から、Case 1 および Case 4 の崩れ波型碎波から、Case 3 および Case 6 の巻き波型碎波の形態に対応して、沖波波形勾配 H_0/L_0 が小さいほど、水面波形の前傾度が著しくなって碎波する状況が実験結果と良く一致して示される。なお、図中の t_c/T と $\Delta x_c/L$ とは完全には一致せず、この傾向は、 H_0/L_0 が小さいほどその相違が著しい。これは、図-4.2.3に示したように、傾斜面上の波の変形においては、波形勾配が小さくなると、時間波形と空間波形とは同じでなく、空間的な水面波形の変化の方が大となることを意味している。

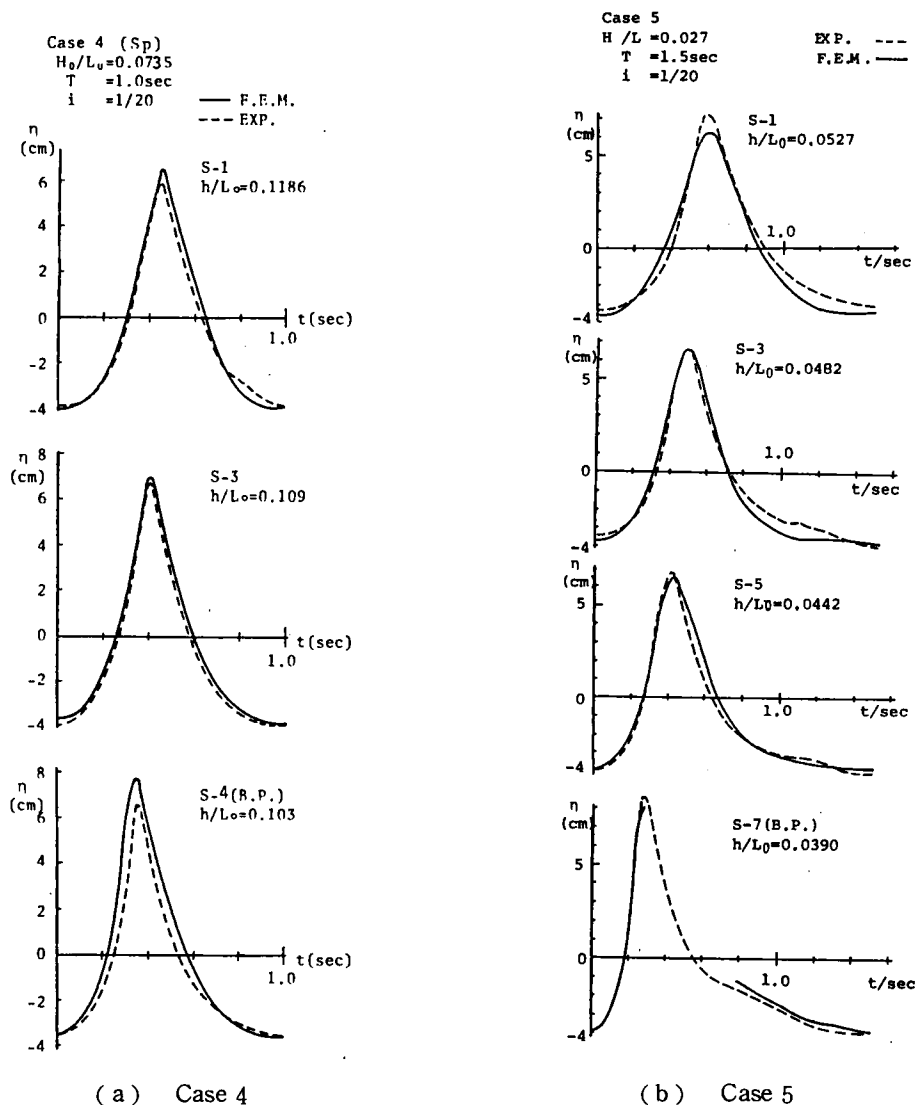
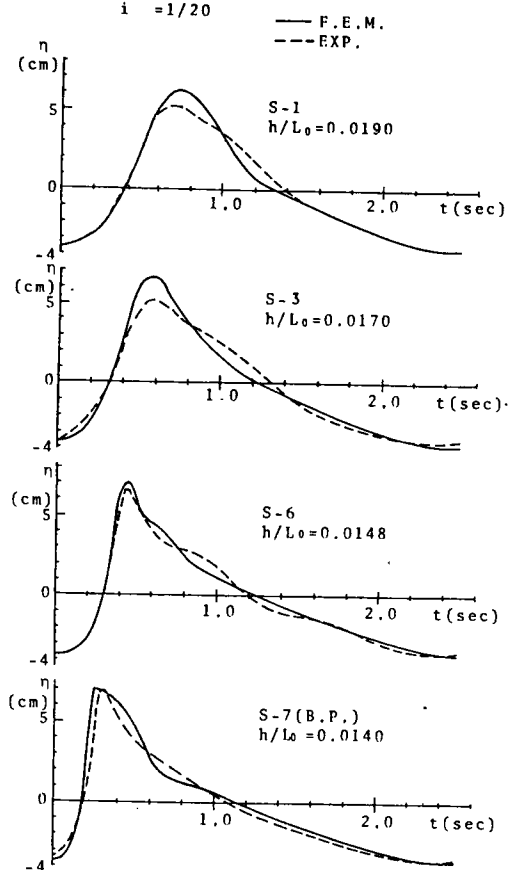


図-4.3.7 (a), (b) 水深減少に伴う波形変化

Case 6 (Pu)
 $H_0/L_0 = 0.0083$
 $T = 2.5(\text{sec})$
 $i = 1/20$



(c) Case 6

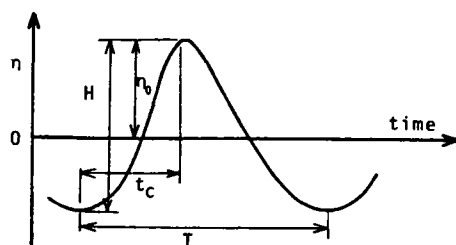
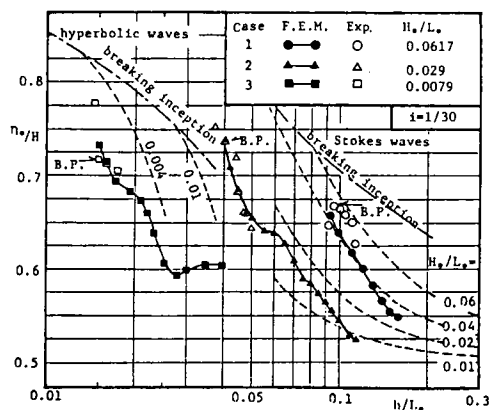
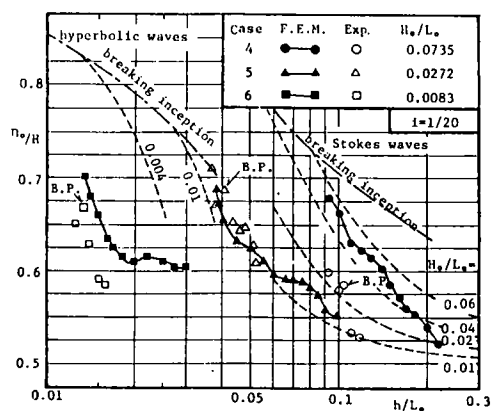


図-4.3.8 波形の非対称性に関するパラメーター

図-4.3.7(c) 水深減少に伴う波形変化

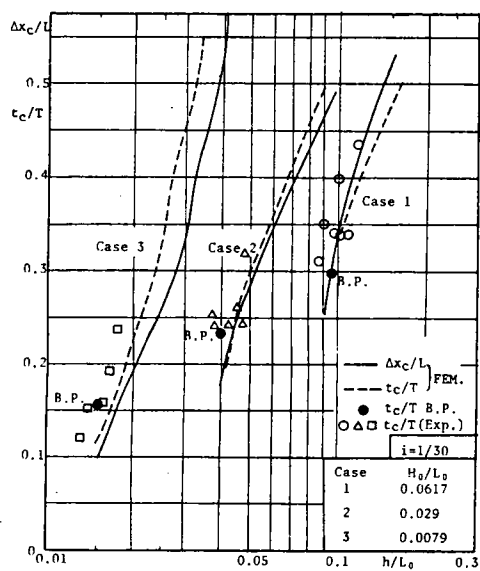


(a) $i = 1/30$

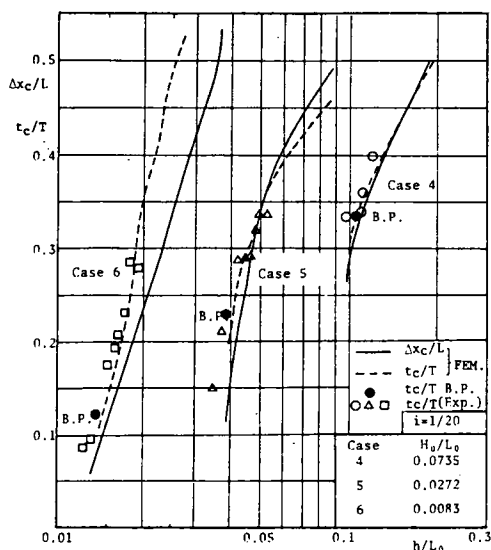


(b) $i = 1/20$

図-4.3.9 水深減少に伴う峯高の変化



(a) $i = 1/30$

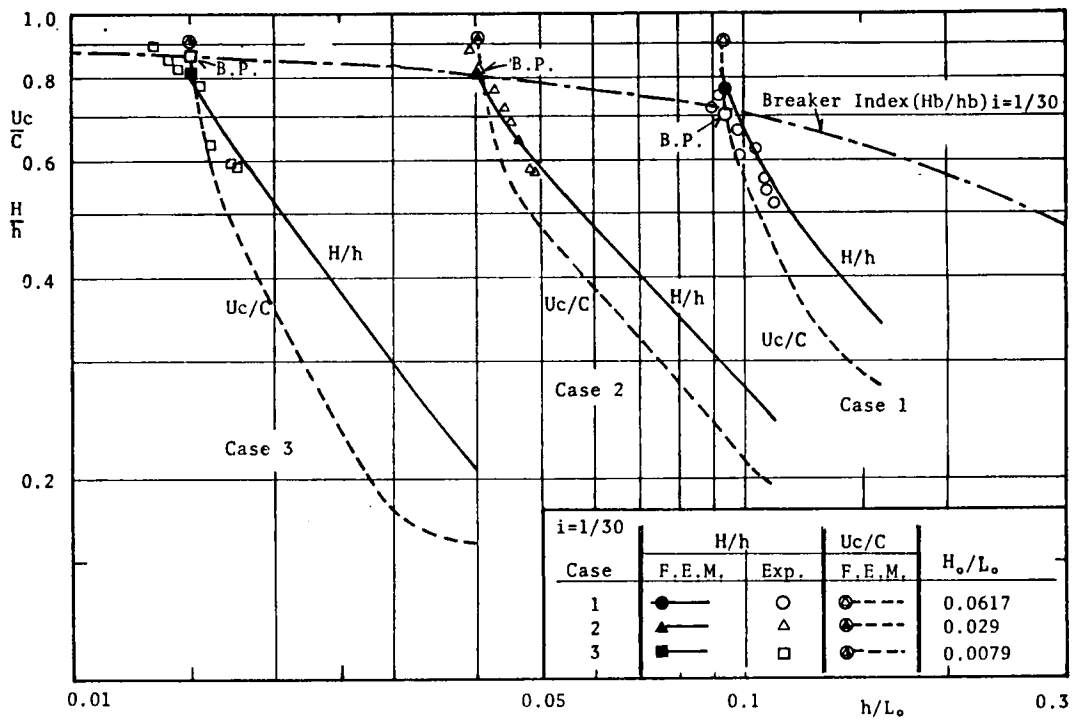


(b) $i = 1/20$

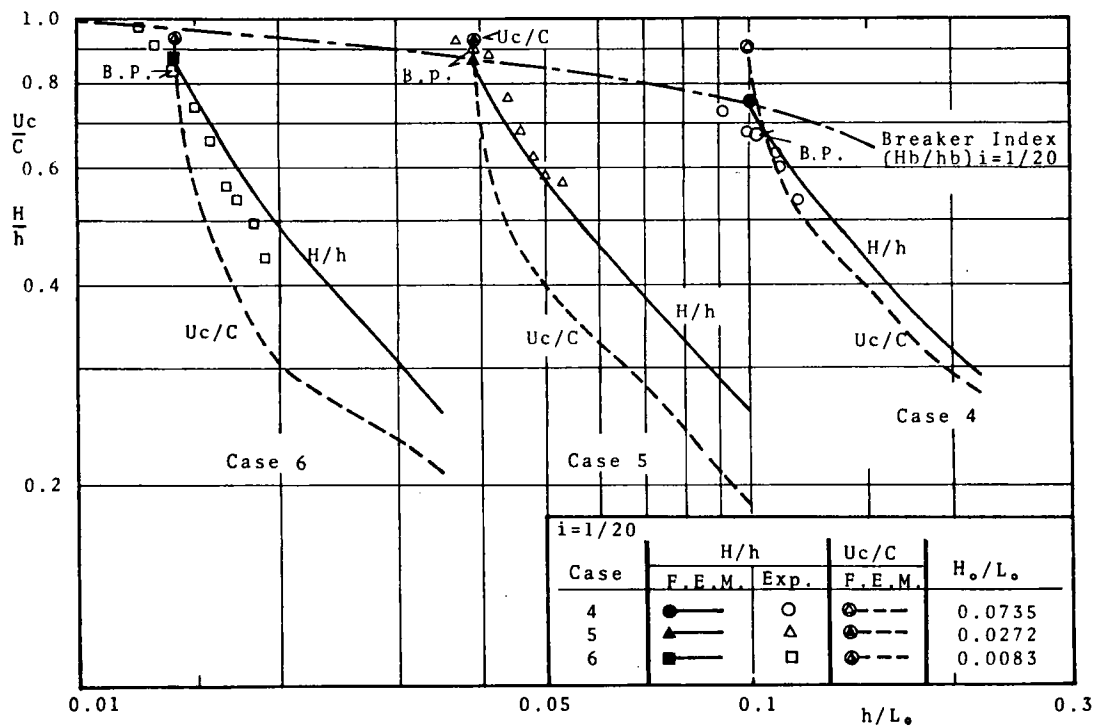
図—4.3.10 水深減少に伴う波の前傾度の変化

次に、図—4.3.11(a), (b)は、水深減少に伴う波高水深比 H/h および波の峯での水平水粒子速度 u_c と波速 C との比 u_c/C がどのように変化するかを示して、斜面上での砕波条件について検討したものである。図中の実線は、 H/h の数値計算結果であり、これと対応して実験結果をプロットしている。計算結果は実験とよく一致し、水深の減少に伴って、 H/h が次第に増加して砕波に至ることがわかる。また、 H/h の砕波点での値も、先の図—4.3.3で示したように合田の砕波指標にはほぼ合っていることがわかる。また、図中の破線は、このときの u_c/C の計算結果である。水深の減少とともに砕波点近傍で急に増大して、各ケースとも、 $u_c/C \div 0.9 \sim 0.95$ の値で計算上の限界となる。（これは、計算上 $u_c/C > 1$ の場合には、水面波形が急に不連続となり、計算精度も十分でなくなるために、計算上の限界は上述の u_c/C の値とした。）すなわち、斜面上の砕波条件として、従来より最も一般的に仮定される $u_c = C$ の条件で、砕波の型式に関係なく砕波するものと考えてよいと思われる。

また、図—4.3.12は、斜面勾配 $i = 1/20$ の Case 4, Case 5, Case 6 について、 H/h を横軸に、 u_c/C を縦軸にとり相互の関係を示している。微小振幅波、ストークス波の第2次解¹⁶⁾およびハイパボリック波²⁴⁾の各種定形波理論に、各水深 h に対応する数値計算結果の H を与え、このときの u_c/C を求めて、これら定形波理論の適用性について検討したものである。図中には、対応するケースの砕波限界波高比 H_b/h_b を示してある。これらによると、ストークス波およびハイパボリック波理論による値は、いずれも u_c/C の過大な値を与え、また、逆に微小振幅波理論による値は過少評価をすることがわかる。また、これらの各種定形波理論の中では、この場合は、微小振幅波理論による値が比

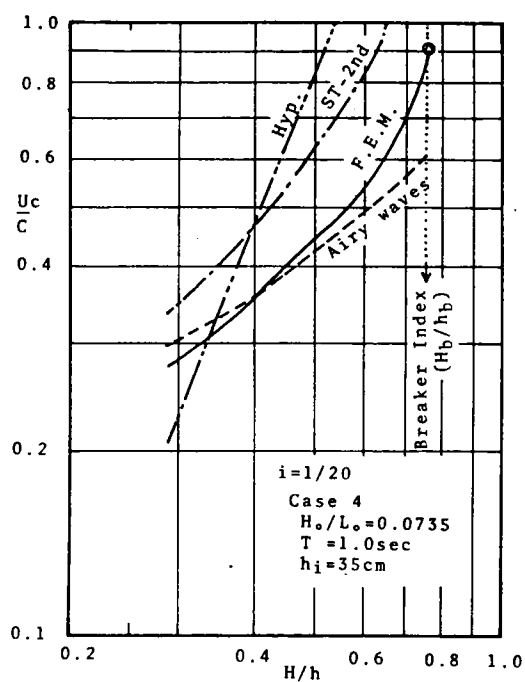


(a) $i = 1/30$

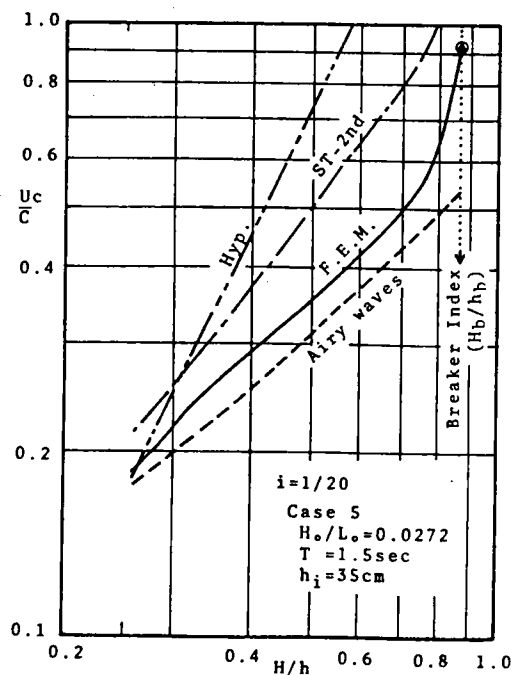


(b) $i = 1/20$

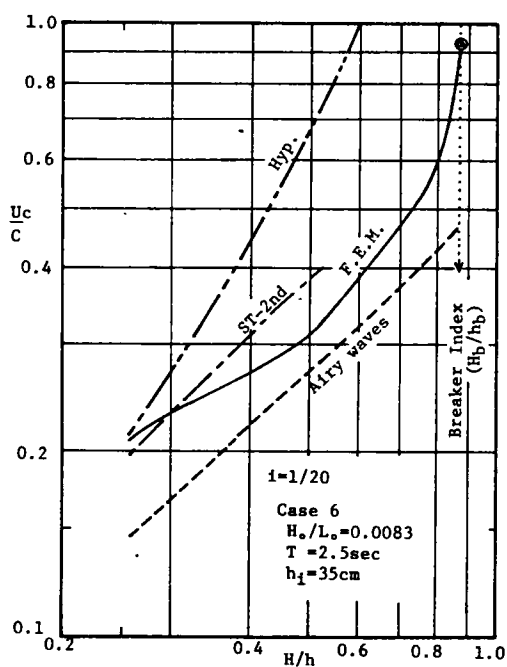
図-4.3.11 水深減少に伴う u_c/C , H/h の変化



(a) Case 4



(b) Case 5



(c) Case 6

図-4.3.12 斜面上での H/h と u_c/C

較的、本計算結果に近い値を示すが、砕波点近傍および沖波波形勾配 H_0/L_0 が小さくなると、その差異が著しくなり過少な値となることが示される。これは、図－4.2.3 に示した空間的波形の変化から知れるように、水面波形が前後対称な波形から、しだいに前傾化することと対応する。すなわち、斜面上の進行波に対する従来の定形波理論の適用性については、その水面波形の変化状況を考慮し得ない点に最大の原因があり、それが適用の限界を意味し、斜面上など水深減少に伴う波の変形と砕波の過程の計算は、本計算法などの数値解析手法によらざるを得ないと考えられる。

第4節 斜面上の波の砕波変形と内部機構に関する検討

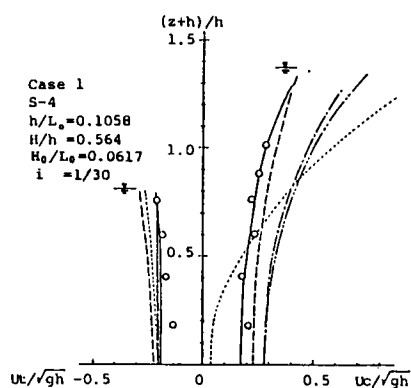
第3節で示したように、本数値計算法は、斜面上を進行して砕波に至る波の波高や波速の変化、波形の変形などに関して、実験結果とよく一致し、砕波近傍まで十分な精度で計算できることが検証され、従来の定形波理論では説明できない斜面上の砕波過程における波の変形特性を、砕波形態と対応して明らかにすることができた。ここでは、さらに、L. D. V. による内部水粒子速度の測定結果との比較を行って、速度場に対する本計算結果の妥当性を検証して、砕波近傍での水粒子の速度、エネルギーおよび水粒子加速度の時間的・空間的な変化について砕波型と関連して考察を行う。

(1) 水深減少に伴う水粒子速度の変化

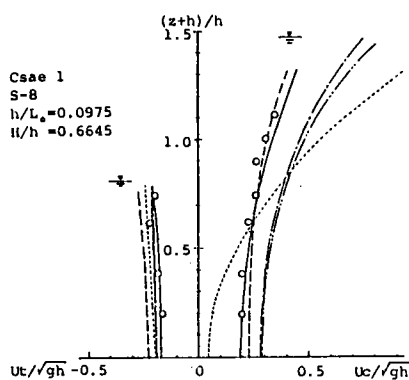
水深減少に伴う波の変形過程のなかで、その内部機構である水粒子速度の変化について、まず、第2節で述べた L. D. V. による測定結果と本数値計算との比較を行い、本計算法の妥当性について検討し、ついで、水粒子速度場の変化特性を、第3節で述べた波の諸量の変化特性との関連において考察する。

図－4.4.1(a)～(f)は、各実験ケースにおける、砕波点に至るまでの各測定断面での水平方向水粒子速度 u の波の峯および谷の位相での鉛直分布を無次元化して示したものである。ここで、 z は静水面を原点として鉛直上向きにとった座標であり、 $z+h$ は底面からの高さを表わす。また、 u_c は波の峯の位相での u 、 u_t は波の谷の位相での u を意味する。図中の○が L. D. V. による測定結果であり、実線が有限要素法による本数値計算結果である。また、図中には、比較のために、定形波理論である微小振幅波理論、ストークス波の第2および第3次解¹⁶⁾、ハイパボリック波理論²⁴⁾による曲線を示している。これらの各種定形波理論の値は、測定位置での実験による波高 H を用いて計算されたものである。ただし、巻き波型砕波である図－4.4.1(c)および(f)の Case 3、Case 6 の場合、砕波点近傍でストークス波理論解の収束が悪く、この理論曲線は示していない。また、L. D. V. による測定は、レーザー・ビームが水中で交差する必要があり、水底あるいは水表面のごく近傍では測定が困難である。特に、砕波点近傍の波の峯の水面近傍では、峯の位相速度も瞬時であるため、レーザー・ビームが水中で交差する時間も短く、測定困難でその測定結果を得ることができなかった。このように、L. D. V. 装置の問題上、波の峯の位相での水面近傍の測定結果との比較はできないが、本数値計算結果は、実験の全ケースを通じて、砕波以前から砕波のごく近傍（図中の B. P. 断面が、実験の砕波位置を示す。）まで実験結果と極

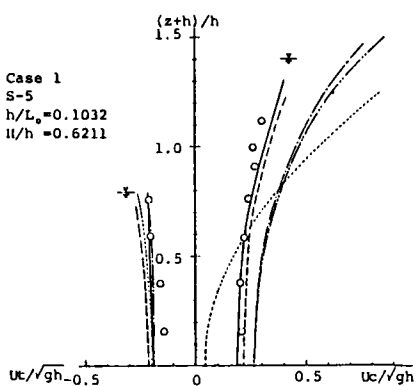
O Experiment --- Stokes 2nd.
 — F.E.M. --- Stokes 3rd.
 - - - Airy wave - - - Hyperbolic wave



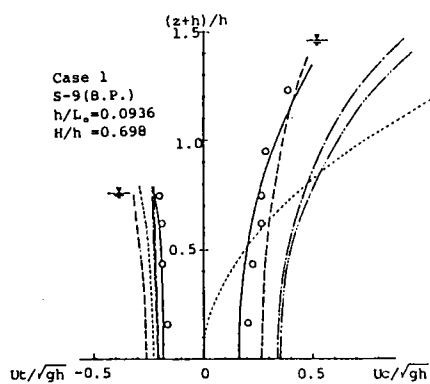
(a) - 1



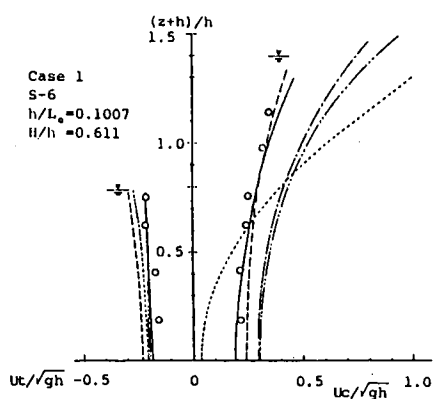
(a) - 4



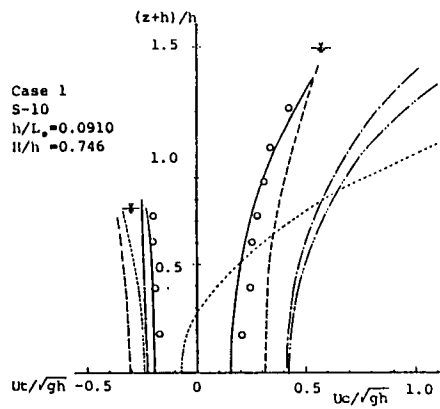
(a) - 2



(a) - 5



(a) - 3



(a) - 6

図-4.4.1 (a) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 1)

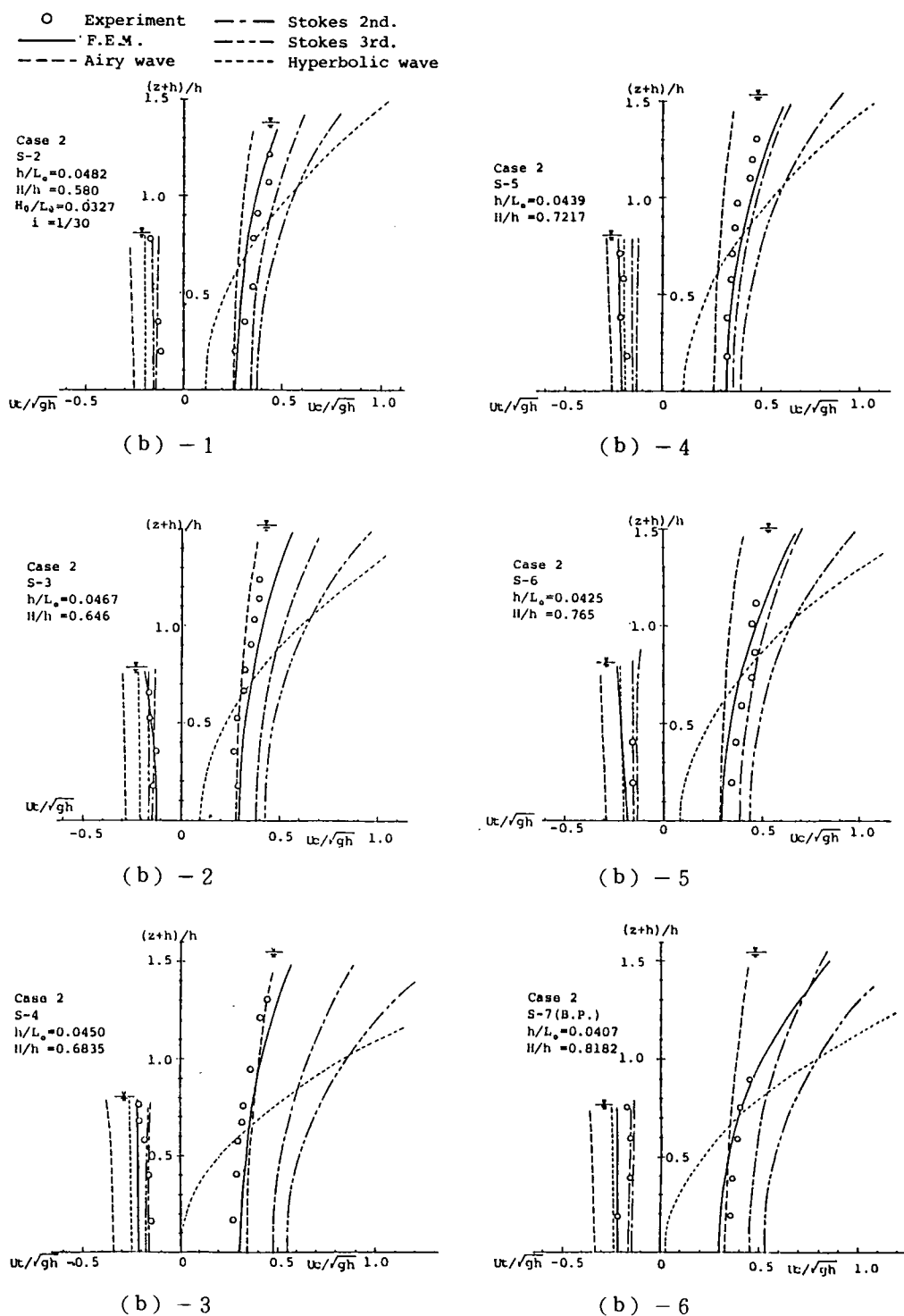
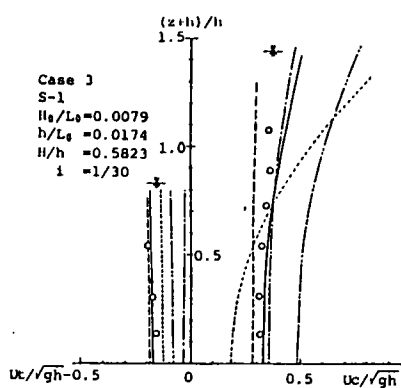
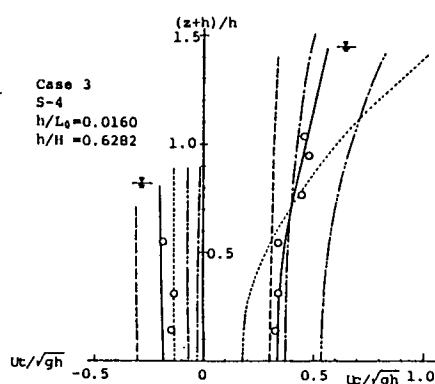


図-4.4.1 (b) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 2)

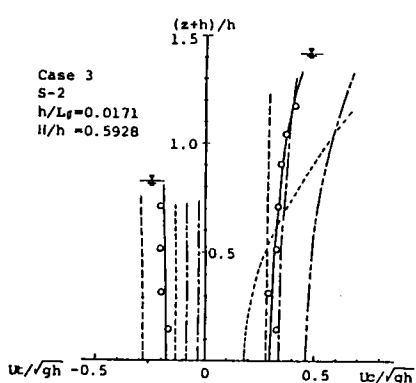
O Experiment --- Stokes 2nd.
 — F.E.M. --- Stokes 3rd.
 - - - Airy wave ····· Hyperbolic wave



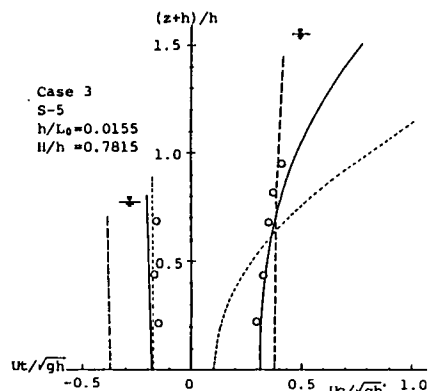
(c) - 1



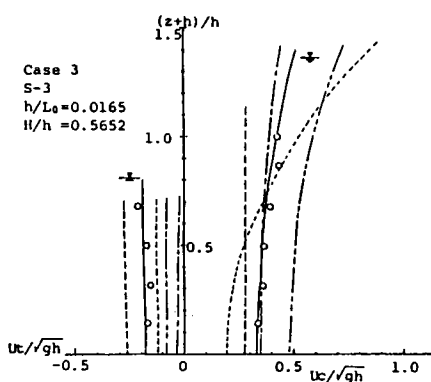
(c) - 4



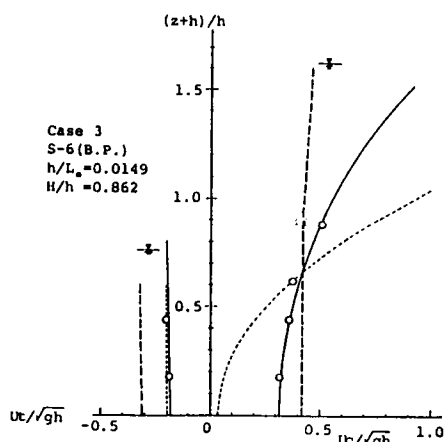
(c) - 2



(c) - 5



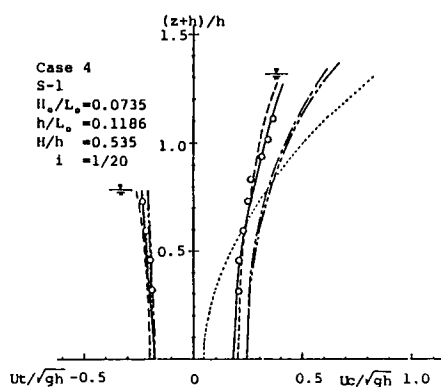
(c) - 3



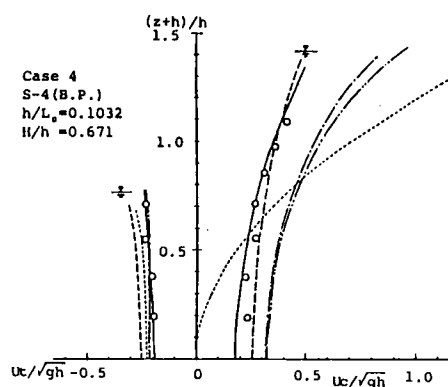
(c) - 6

図-4.4.1 (c) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 3)

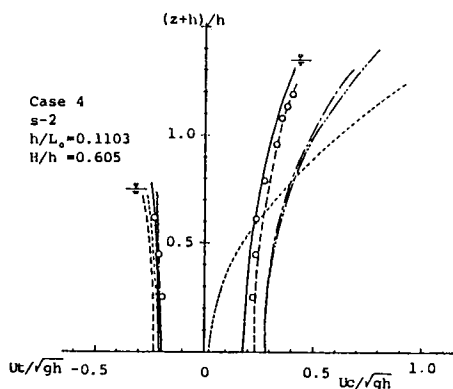
○ Experiment --- Stokes 2nd.
 — F.E.M. --- Stokes 3rd.
 - - - Airy wave Hyperbolic wave



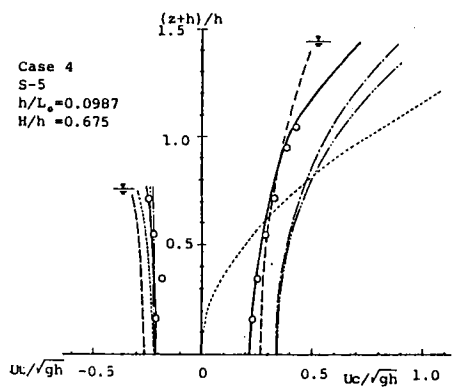
(d) - 1



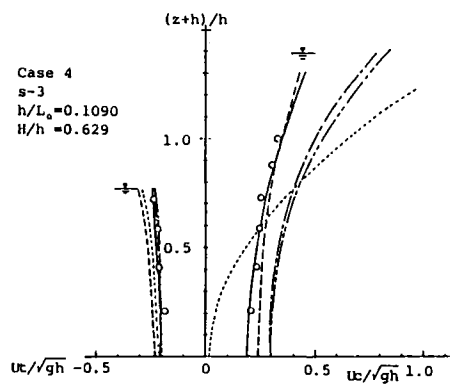
(d) - 4



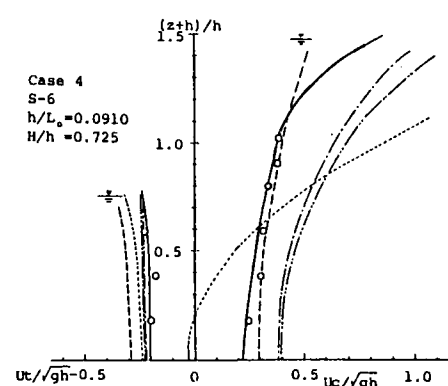
(d) - 2



(d) - 5



(d) - 3



(d) - 6

図-4.4.1 (d) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 4)

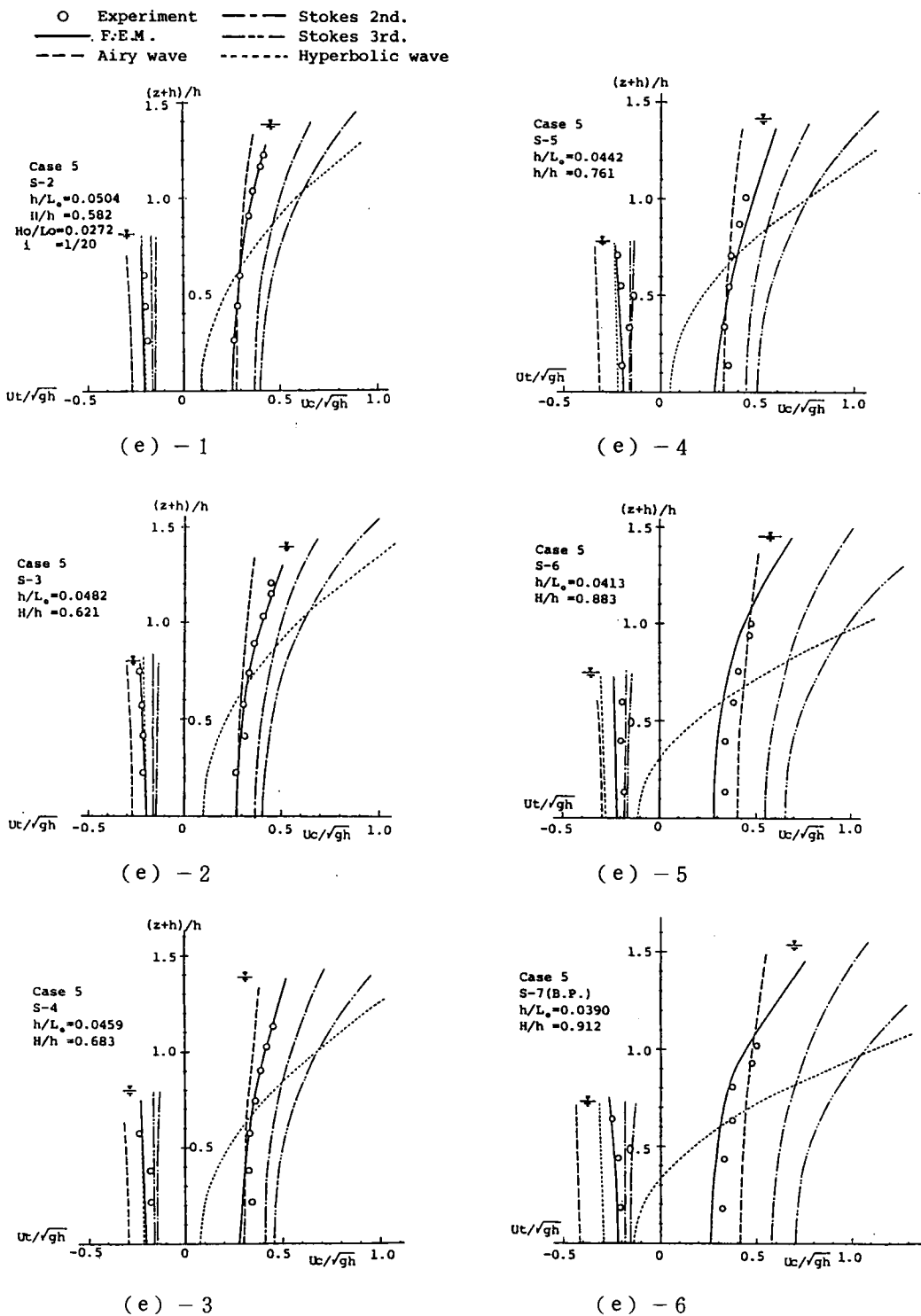


図-4.4.1 (e) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 5)

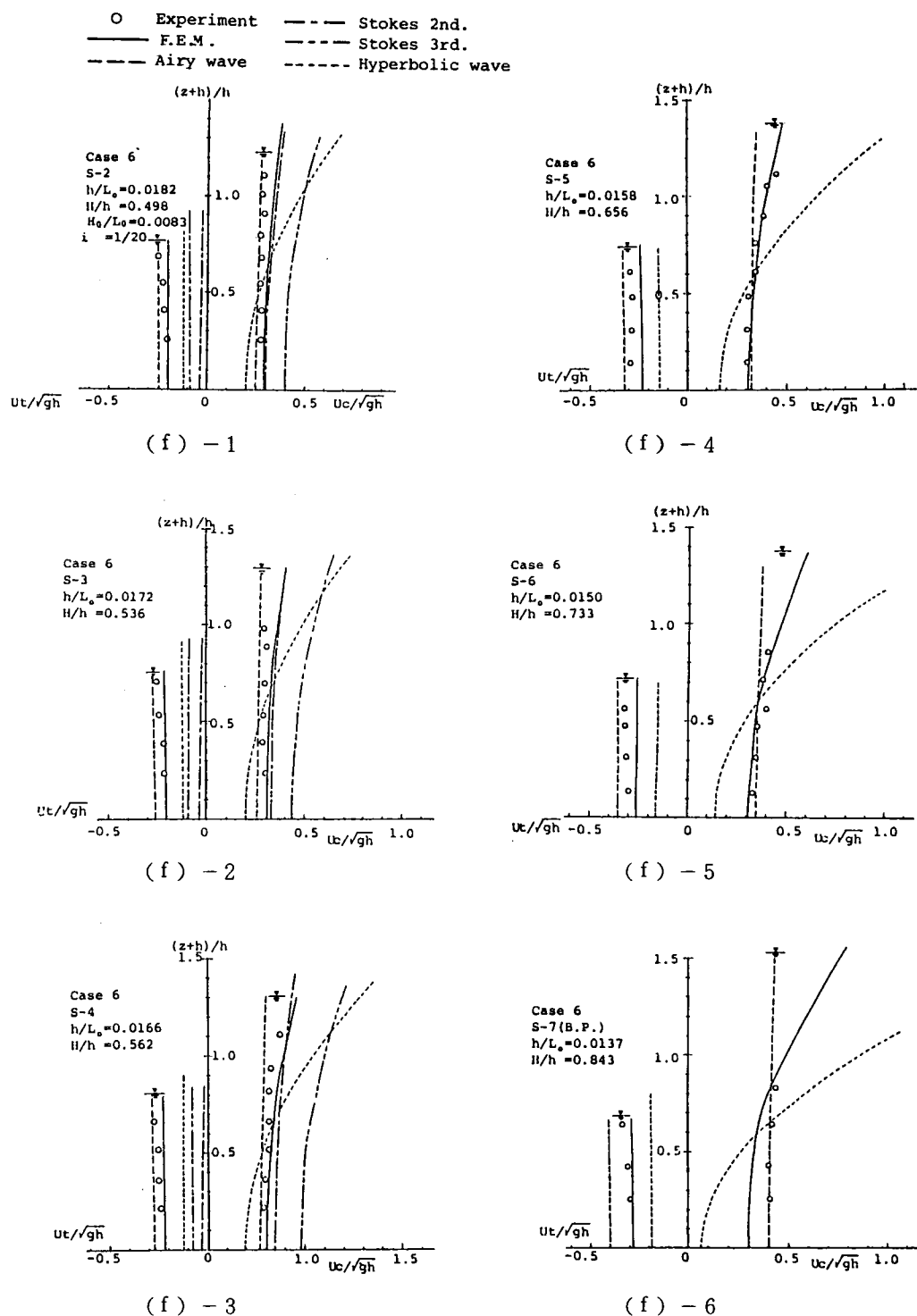


図-4.4.1 (f) 水平方向水粒子速度の鉛直分布の変化 (Case 6)

めて良く一致することが示され、従来の定形波理論では表現できない碎波近傍の水粒子速度を高い精度で計算できることが実証される。

さて、これらの図より、水深減少に伴う水平水粒子速度は、全体的には、各ケースにおいて u_t および u_c とともに増加し、とくに、 u_c は水面近傍での増加が次第に著しくなって碎波することがわかる。

碎波形態の相違による水平方向水粒子速度の鉛直分布形状の特性は、まず、崩れ波型碎波である(a)図の Case 1 および(d)図の Case 4 の場合、 u_c と u_t の分布形は対称形に近く、この傾向は碎波点近傍まで続くことがわかる。このことは、水面波形が碎波点まで比較的、前後に対称であることと対応する。この型の碎波の場合、各定形波理論の中では、微小振幅波の理論曲線が u_c に対して最もよく実測値と一致することが知れるが、 u_t に対しては、水深の減少とともに $|u_t|$ を過大評価するようになる。ハイパボリック波理論による値は、 u_t に対しては比較的一致するが、 u_c は分布形そのものが大きく異なった分布となり、とくに、水面付近では実測値と比べて急な増大をし過大評価をすることがわかる。また、ストークス波の理論値は、流速分布に関して第3次解よりも第2次解の方がより実測値に近い値を示す。しかし、 u_t に対しては、碎波近傍まで比較的良好に一致するが、 u_c に対しては、分布の形状は相似形であるものの過大な値を与えることがわかる。

(b)図に示す Case 2 の崩れ波と巻き波の中間型の碎波の場合には、上述の崩れ波型碎波で対称的であった u_c と u_t の分布形が、 u_t より u_c の方が大となり、流速分布形にも非対称性が現われる。 u_c の分布は、微小振幅波理論の分布形からストークスの第2次解の分布形にかけて分布し、また、 u_t の分布に対してもストークスの第2次解がよく一致することが示される。

巻き波型碎波である(c)図の Case 3 および(f)図の Case 6 の場合には、碎波近傍まで実験の u_c は水深方向に様に分布して長波的分布形となることがわかる。定形波理論の合致する範囲に限られ、特に u_t の分布は過少評価するようになる。

このように、水深減少に伴う波の峯と谷の位相での水平方向水粒子速度の変化は、碎波型との考察を行うことによってある程度その特性を明らかにすることができ、このことは、後述するように、内部の水粒子速度の分布が水面波形の変化と密接に対応していることを示すものである。

図—4.4.2 は、各ケースの碎波近傍での波の峯の位相における水平方向水粒子速度の鉛直分布の計算結果を示したものであり、図(a), (b), (c)が斜面勾配 $i = 1/30$ 、図(d), (e), (f)が $i = 1/20$ の場合である。各図中に、そのときの碎波型を示している。縦軸は、各ケースについて比較できるように、その断面での水深 h と水面位置 η_c との和 $(h + \eta_c)$ を用いて、水底からの位置 $(h + z)$ を無次元化してある。また、横軸には、無次元化した水平方向水粒子速度 u_c/\sqrt{gh} 、単位重量当りの水粒子のエネルギー $(-\rho \cdot \partial \phi / \partial t) / (h + \eta_c)$ および水平方向へのエネルギーフラックス $u_c \cdot (-\rho \cdot \partial \phi / \partial t) / \{(h + \eta_c) \cdot \sqrt{gh}\}$ を同時に示してある。これらの図から、図中○—○の水平方向水粒子速度 u_c/\sqrt{gh} の鉛直分布形は、崩れ波から巻き波碎波になるに従って、水面近くで急に増大する分布となることがわかる。なお、このときの各碎波型に対応する鉛直分布形は、岩垣・酒井ら¹¹⁾の示した実験結果にもとづ

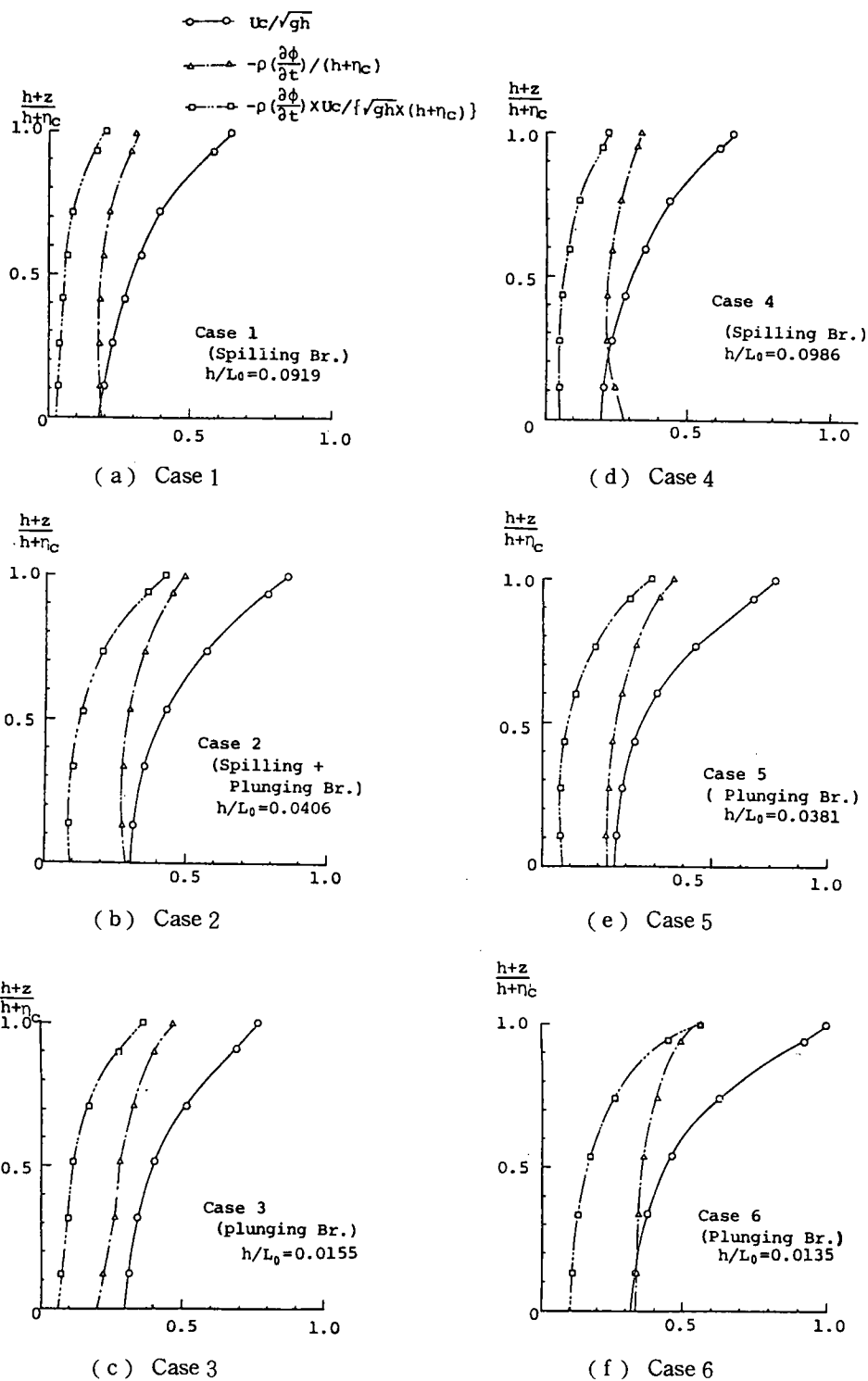


図-4.4.2 波の峯の位相における水平方向水粒子速度，エネルギー，エネルギーフラックスの鉛直分布の碎波型による変化

く碎波型の分類に合致するものである。また、図中△——△の水粒子のもつエネルギー $(-\rho \cdot \partial \phi / \partial t) / (h + \eta_c)$ は、崩れ波から巻き波碎波になるに従って大となり、しかも水底から水面近くまで一様な分布形となる傾向がある。この結果、図中□——□のエネルギーフラックス $u_c \cdot (-\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}) / \{(h + \eta_c) \cdot \sqrt{gh}\}$ は、崩れ波から巻き波になるにつれて、その断面内での全体量は大きく、しかも水底から水面へ近づくにしたがって増大する分布の勾配が大となることが示される。すなわち、これらのことは、崩れ波が波峯の頂部のみが碎け始め、また、巻き波の場合、一時に波峯全体が碎ける形態であることと対応しているようである。

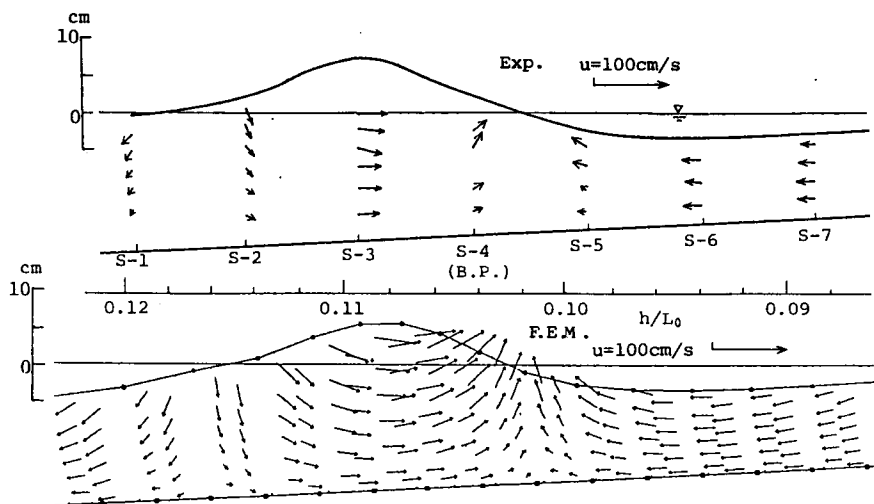
しかしながら、上述のような碎波時の波の峯のみでの検討では、碎波形態による内部機構の顕著な相違は見い出せない。

図－4.4.3、図－4.4.4および図－4.4.5は、斜面勾配1/20の場合の碎波近傍での流速ベクトルの空間分布を、実験結果と数値計算結果とを対比して示したものである。図－4.4.3はCase 4 ($H_0/L_0 = 0.0735$)の崩れ波型碎波、図－4.4.4はCase 5 ($H_0/L_0 = 0.0272$)の崩れ波に近い巻き波型碎波、図－4.4.5はCase 6 ($H_0/L_0 = 0.0083$)の巻き波型碎波の場合である。各図において、(a)図が碎波前の状態、(b)図が実験で観察された碎波位置近傍に波の峯があるときの、水粒子速度の分布状態である。これらの図から、計算結果はそれぞれの碎波形態に対応した空間波形および水粒子速度の分布ともに実験結果とよく一致しており、これからも本計算法が十分な精度で碎波近傍の水粒子速度場を表現し得ることが確かめられた。

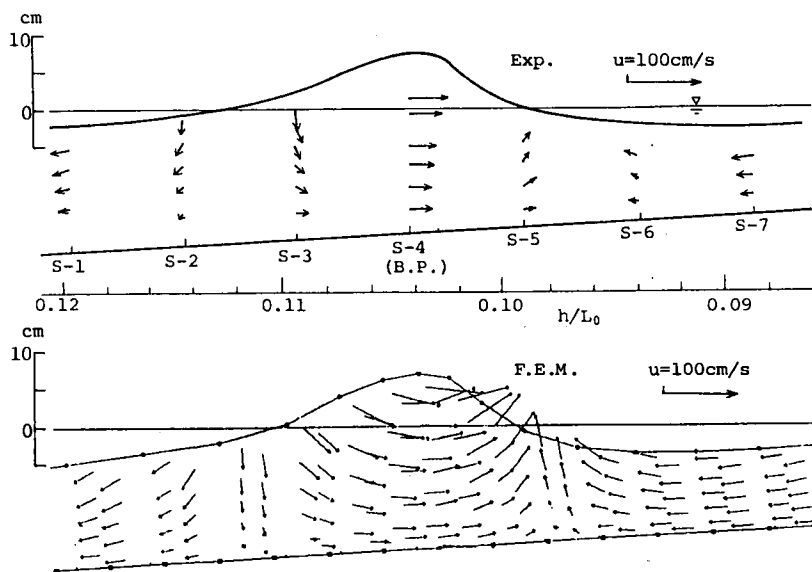
水面波形の特性は、すでに第3節でも定量的に調べたように、図－4.4.3の崩れ波型碎波では碎波波形が比較的前後および上下に対称に近く、また、図－4.4.4および図－4.4.5の巻き波型碎波では、波形の上下および前後の非対称性が顕著であることが示される。

碎波近傍での速度場は、このような水面波形の形態とよく対応する。すなわち、図－4.4.3の崩れ波型碎波の場合は、波の峯を中心に比較的对称性を示し、また、鉛直方向についても正弦波的な分布形を保持している。このことは、崩れ波型碎波の場合に対しては、微小振幅波理論およびストークス波理論などの定形波理論の適用の可能性を示すものであって、先の図－4.4.1の(a)および(d)で示したように、波の峯および谷の位相での水平方向水粒子速度の鉛直分布が碎波近傍までこれらの理論値が実験値とよく一致することからもわかる。

また、図－4.4.4および図－4.4.5の巻き波型碎波となるに従って、波の前傾度が大きくなり、水粒子の速度分布形は、波の峯と前面の谷との短い区間で水平および鉛直の方向が変わり急な変化が起こる。また、峯の背後では流速の変動はゆるやかで、水深方向にも比較的一様な分布を示す。この場合の水平水粒子速度の鉛直分布は、水面から水底まで比較的一様に分布し、長波的な分布形である。また、鉛直流速成分は、波の峯と前面の谷の区間で上向きとなるが、一様水深場に対する定形波理論との相違は、その最大となる位置が、水面波形と静水面とが交差する所でなく、それよりも多少進行方向にずれることであり、図－4.4.3の場合との比較からもその様子がわかる。



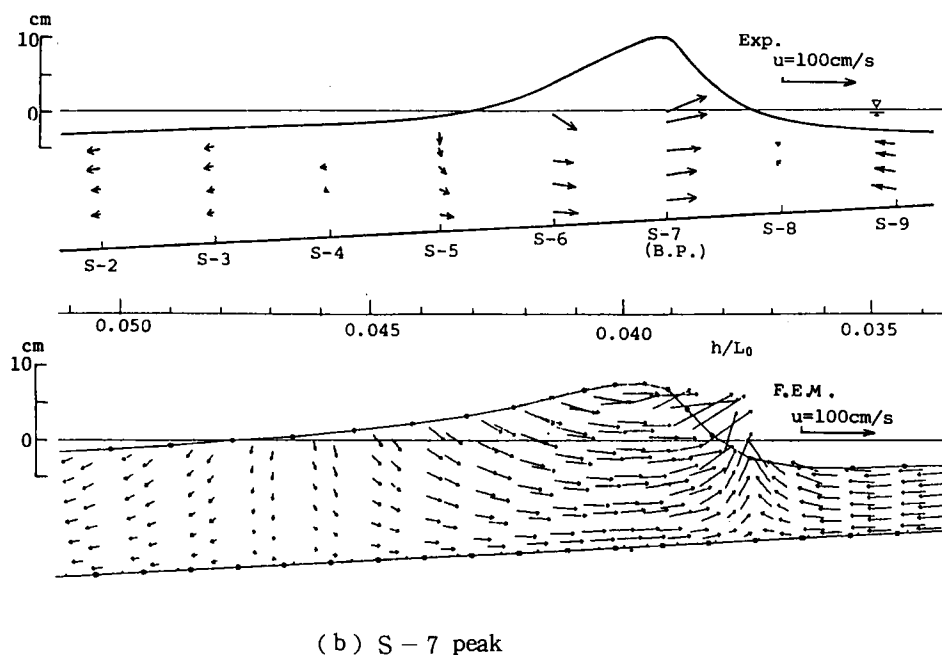
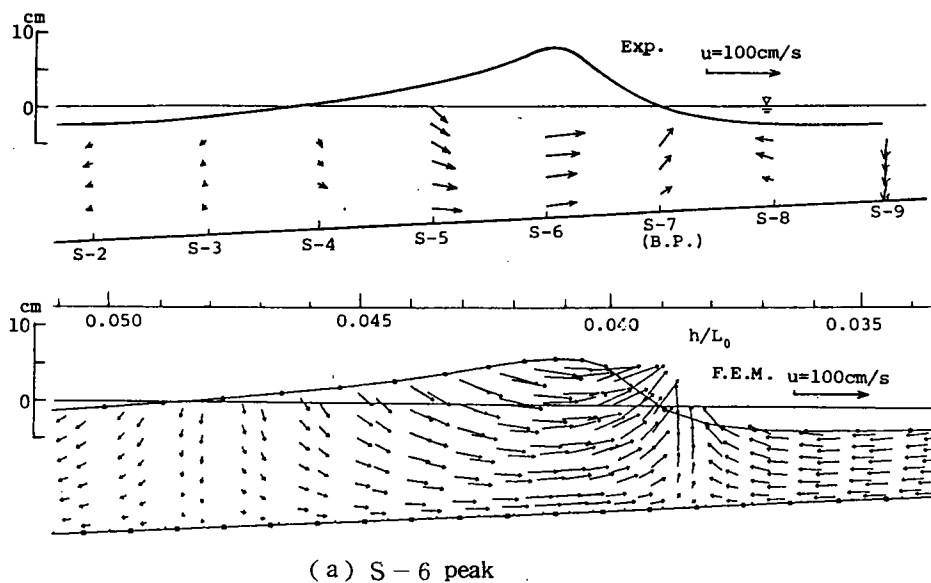
(a) S - 3 peak



(b) S - 4 peak

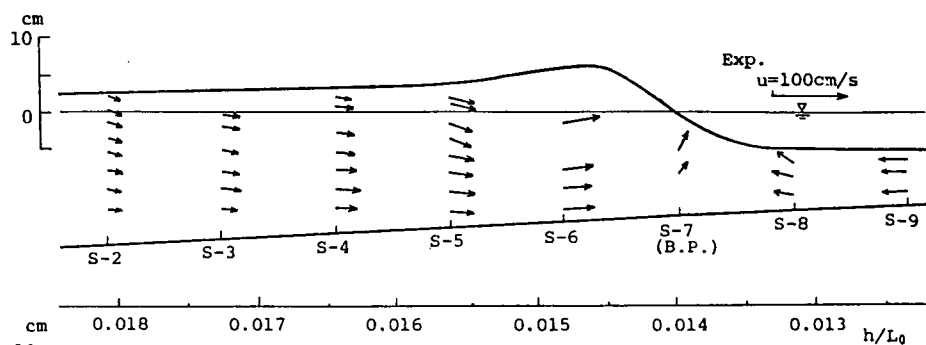
Case 4, $H_0/L_0 = 0.0735$ (spilling breaker)

図-4.4.3 砕波近傍での水粒子速度場 (Case 4)

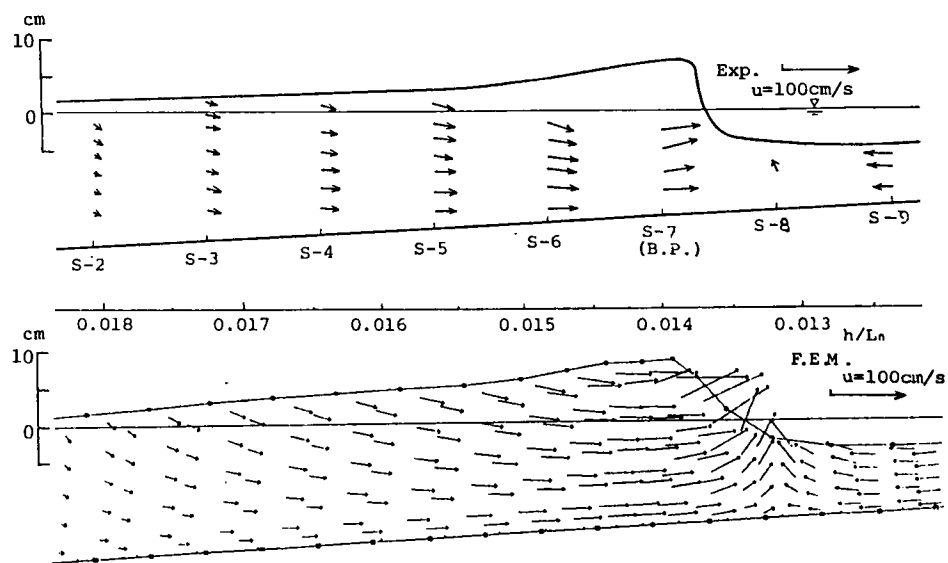


Case 5, $H_0/L_0 = 0.0272$ (plunging breaker)

図-4.4.4 碎波近傍での水粒子速度場 (Case 5)



(a) S - 6 peak



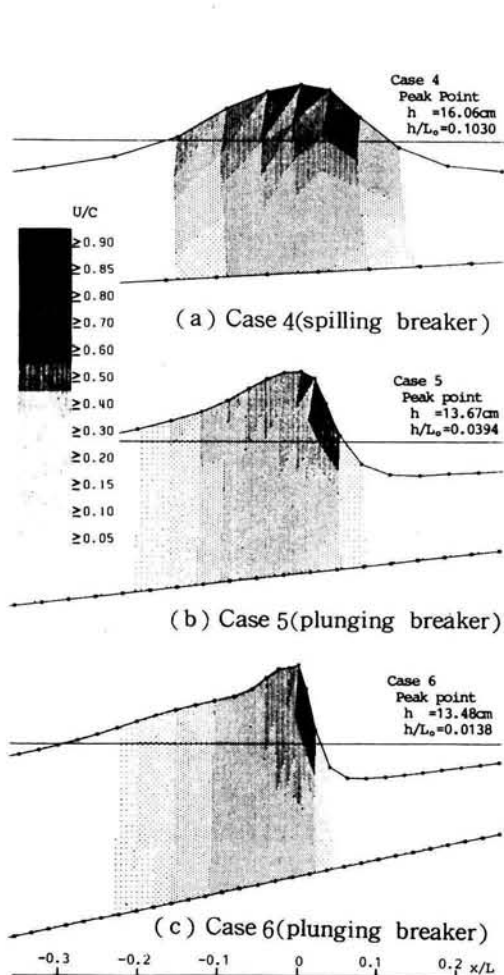
(b) S - 7 peak

Case 6, $H_0/L_0 = 0.0083$ (plunging breaker)

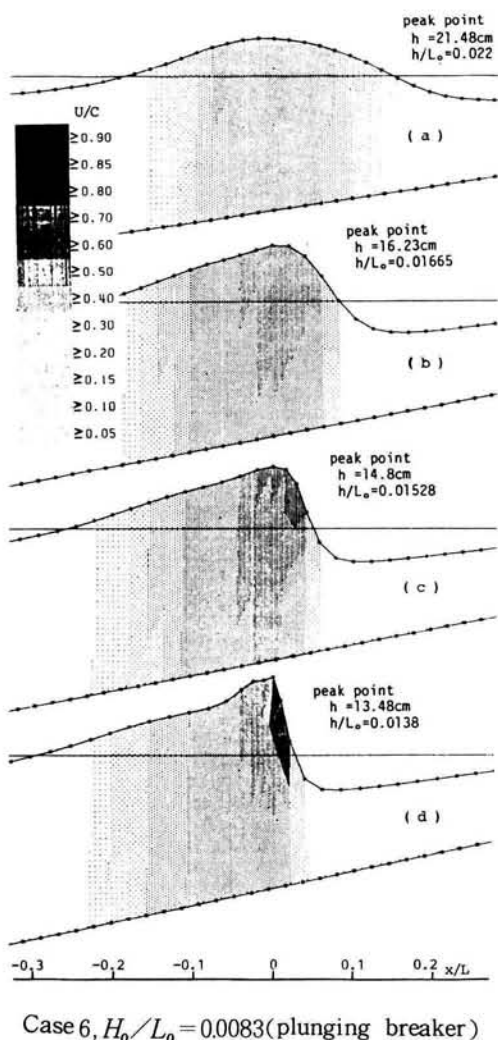
図-4.4.5 砕波近傍での水粒子速度場 (Case 6)

以上、各ケースとも、流速の空間的分布形が水面波形とよく対応していることが知れたが、このことは、水面波形を何らかの形で表現できれば、その内部流速の特性をある程度説明できることを意味し、その研究として、一様水深場での理論である Dean¹⁵⁾ の流れ関数法をこれに適用した岩垣・酒井¹²⁾ の試みがある。

砕波近傍における水粒子速度場は、上述のように、空間的な砕波の形態との対比によって、その特性を明確にすることができた。さらに、砕波近傍での内部の水平方向水粒子速度 u と波速 C との比 u/C の分布状況を数値計算結果により図—4.4.6 および図—4.4.7 に示す。各図は、それぞれの波峯の位置での波長および水深を用いて水平方向と鉛直方向の距離を無次元化している。図は、有限要素計算の三角形要素ごとに、その重心の位置での u/C の値を濃淡で示し、 u/C の分布の概略を図化表現したものである。



図—4.4.6 砕波型による u/C 分布の変化



図—4.4.7 水深減少に伴う u/C 分布の変化

図-4.4.6は、それぞれ、Case 4、Case 5および Case 6の場合の碎波近傍での分布を示し、碎波型による比較を行ったものである。これらの図から、いずれの碎波型においても、その波峯部の水面近くの一部で u/C の値が1に近づき碎波に至る様子がわかる。さらに、Case 4の崩れ波型碎波では、 u/C の大きい値の集中する場所が、波峯の前後にはほぼ対称に存在し、また、Case 5からCase 6の巻き波型碎波では、波峯前面の“きり立ち”化とともに、次第に、波峯部からその前面の水面近傍に集中することが示される。このことは、崩れ波型碎波では、波峯部のみが砕け始め、また、巻き波型碎波では波前面で波峯部が一体となって碎波することと対応しており、 u/C の分布状況が碎波の状態を良く表現することがわかる。第3節の図-4.3.11でも示したように、碎波条件として、 $u_c = C$ が碎波型に関係なく適用できることが、これらの図からも推定される。

さらに、図-4.4.7は、Case 6の巻き波型碎波の場合の、水深減少に伴う u/C の分布の変化を示す図である。斜面上を進行し、水深減少に伴って、水面波形の非対称性が段々と増大し、 u/C の大となる場所が、次第に波峯部の水面近傍に集中して、碎波に至る状況が示されている。

(2) 碎波近傍での波動場の特性に関する考察

有限要素法による本数値計算方法は、斜面上で変形し碎波する波の内部機構である、水粒子の速度場についても、実験結果とよく一致することが確かめられ、碎波近傍での速度場の特性を碎波型と関連して、明らかにすることができた。ここでは、さらに本数値計算結果を用いて、従来はほとんど明らかにされていない碎波近傍における水粒子のもつエネルギー分布および加速度の分布を調べ、これらの内部機構の特性について、碎波型と対比して考察する。

a) 水粒子エネルギーの分布特性

水の単位重量当りに水粒子のもつエネルギーを E^* とすると、これは

$$E^* = \{ (u^2 + w^2)/2g \} + (p/\rho g) + z \quad \dots\dots\dots (4.4.1)$$

で表現できるが、さらに、波の運動が非回転で、速度ポテンシャル Φ をもつとき、これはベルヌイの定理から定数項を省略して、

$$E^* = -\frac{1}{g} (\partial\Phi/\partial t) \quad \dots\dots\dots (4.4.2)$$

で計算される。したがって、有限要素法による計算の結果から、 $(\partial\Phi/\partial t)$ を式(2.3.28)を用いて計算し、碎波近傍での $E^*/a_0 = (-\frac{1}{g} \partial\Phi/\partial t)/a_0$ (a_0 は沖波振幅)を計算して示すと、図-4.4.8のようである。図は、斜面勾配 $i = 1/20$ の Case 4、Case 5および Case 6の各場合について、 E^*/a_0 の空間分布を等高線により示している。水平方向には波峯の位置での波長 L を用い、また、鉛直方向には波峯の位置の静水深 h を用いて標準化した波の1波を単位として、各ケースの分布状況を比較できるようにしたものである。これらの図から、碎波近傍での E^* の分布は、各ケースとも波の峯部に極大値

をもつ特徴ある形態であることが示される。

また、砕波型によってもその分布特性が現われており、(a)図の Case 4 ($H_0/L_0 = 0.0735$) の崩れ波型砕波では、 E^* の分布も前後に对称に近く、波峯部の極大値は $E^*/a_0 \doteq 1.6$ 以上である。また、(b)図の Case 5 ($H_0/L_0 = 0.0272$) の場合から、(c)図の Case 6 ($H_0/L_0 = 0.0083$) の巻き波型砕波では、水面波形の前傾化とともに、 E^*/a_0 の等高線間隔が波の前面で密となり、 E^* が急な変化となることが示される。波峯部の E^*/a_0 の極大値も、Case 5 では $E^*/a_0 \doteq 2.5$ 以上、また、Case 6 では $E^*/a_0 \doteq 3.5$ 以上であり、沖波波形勾配が小さいほど、水粒子エネルギーの沖波振幅比 E^*/a_0 が波峯部で大となり、かつ、水底までその範囲が広がり、砕波に至ることが示される。

さらに、図-4.4.9 は、Case 6 の巻き波型砕波の場合の、水深減少に伴う水粒子エネルギー E^*/a_0

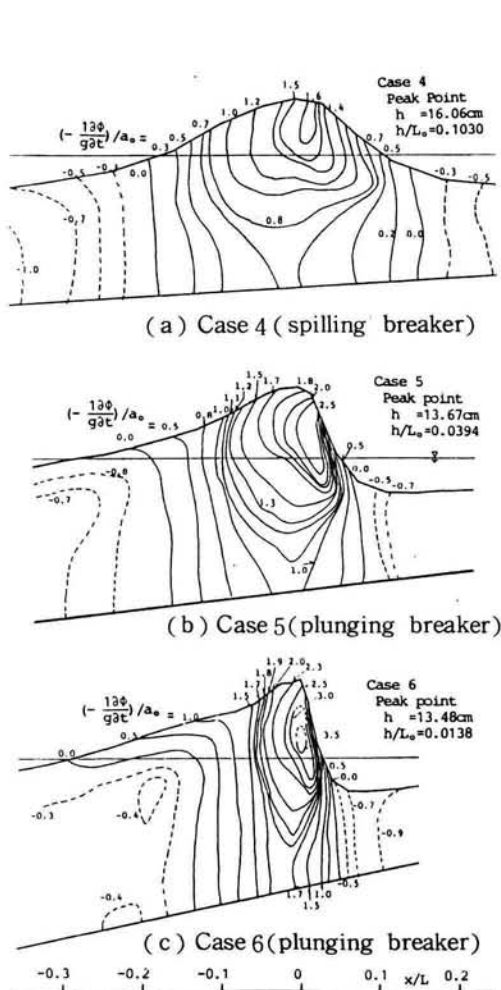
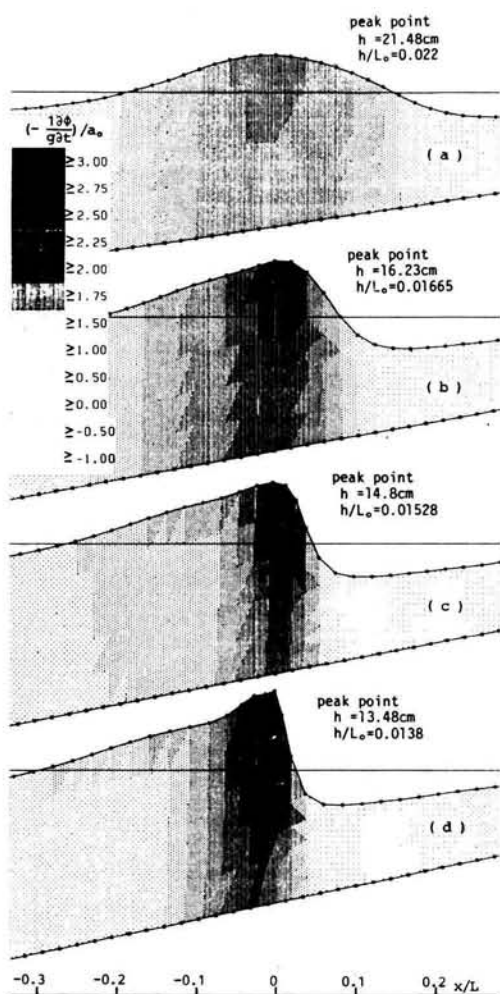


図-4.4.8 砕波型による $(-\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t})/a_0$ 分布の変化

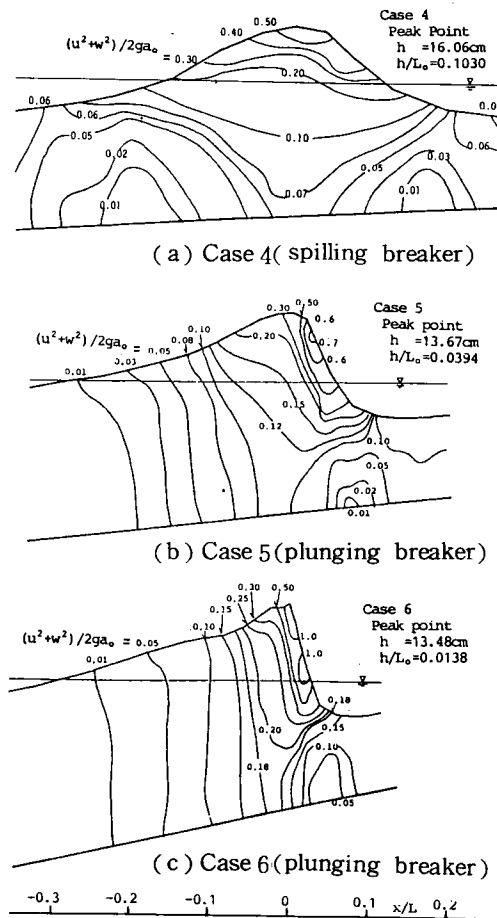


Case 6, $H_0/L_0 = 0.0083$ (plunging breaker)

図-4.4.9 水深減少に伴う $(-\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t})/a_0$ 分布の変化

の分布の変化を示したもので、有限要素計算の三角形要素ごとに、その重心での値を用いて濃淡により図化し、水粒子エネルギーの集中度（密度）の概況を示している。図－4.4.8と同様に、各波峯の位置での波長と水深を用いて1波を単位として、規準化し、図中に示す各水深での分布状況を比較したものである。これらの図より水深減少に伴って、 E^*/a_0 の値が次第に増加し、かつ、波の前傾化とともに、波峯部への集中度が大となって砕波に至ることが示される。

また、図－4.4.10は、それぞれ図－4.4.8に対応する各ケースの水粒子の運動エネルギーの無次元量 $\{(u^2 + w^2)/2g\}/a_0$ を、図－4.4.8と同様に、各波峯の位置での波長と水深を用いて1波を単位として規準化し、各ケースの分布状況を比較したものである。これらの図からも、Case 4の崩れ波型砕波では、水粒子の運動が峯を中心として前後対称的な運動であることが示される。また、Case 5およびCase 6の巻き波型砕波では、波峯部全体が前傾化する形の分布状況を呈し、波の峯の前後での



図－4.4.10 砕波型による $\frac{1}{2g}(u^2 + w^2)/a_0$ 分布の変化

水粒子運動が非対称で、波前面での水粒子運動が活発となって、そこでの運動エネルギーの値も大となり砕波することが示される。

上述したような、斜面上を進行し砕波する波の変形過程に対し、これを、その内部エネルギーの変化の立場から議論した研究は数少く、わずかに、土屋・筒井²⁵⁾によって、波のもつ位置・運動の両エネルギーの分配率に変化が生じ、砕波時には、そのエネルギー分配が不均衡となり、その結果、波が全体として不安定となって砕波することが指摘されているにすぎないようである。

ここでは、さらに、砕波に至る変形過程において、水粒子のもつエネルギーの分布状態が水深減少とともに変化して、波動場内での局所的な水粒子エネルギーの集中度および集中場所の相違が生じ、かつ、これらの分布状態が砕波型によって特徴ある形状を呈し砕波することを明らかにすることができた。

b) 加速度場の特性

水粒子の加速度 α は、流体運動が非回転で、速度ポテンシャル Φ を有する範囲において、たとえば、その x 軸方向成分 α_x は、

$$\alpha_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots\dots (4.4.3)$$

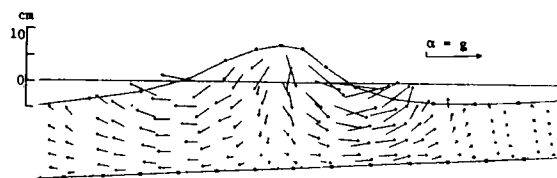
と表現される。すなわち、 $(\partial \Phi / \partial t)$ は、水粒子のもつ加速度のポテンシャルと考え得ることから、式(4.4.2)で示した水の単位重量当りの水粒子のエネルギー $E^* = -\frac{1}{g} (\partial \Phi / \partial t)$ の場所的な勾配が加速度の大きさを表すので、図-4.4.8からも、その等高線の間隔が密な場所に大きな加速度が作用することが推定できる。

ここでは、本数値計算の三角形要素ごとに式(2.3.48)で求められた水粒子速度の水平成分 u および鉛直成分 w を用いて、式(2.3.49)より

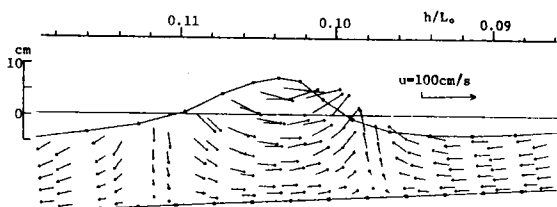
$$\alpha_x = (u - u_0) / \Delta t, \quad \alpha_z = (w - w_0) / \Delta t \quad \dots\dots\dots (4.4.4)$$

として求めた。ここで、 Δt は計算時間間隔、 u_0 、 w_0 は Δt 時間前の u 、 w の値である。この加速度の分布をベクトル表示して図-4.4.11に示す。(a)図は、Case 4 の崩れ波型砕波、(b)図は、Case 6 の巻き波型砕波の場合の砕波近傍での図である。両図中、(a)-1 および(b)-1 が加速度ベクトル、また、(a)-2 および(b)-2 には比較のため、それぞれのケースにおける同時刻の速度ベクトルを示している。

これらの図から、加速度の分布も、全体的には流速の分布と同様に空間的な水面波形の形状と対応しており、波の峯を中心として、加速度のベクトルが前後に分れることが示され、これからも、波峯部に水粒子エネルギーの極大値があることが知れる。さらに、(a)図の Case 4 の崩れ波型砕波では、加速度の分布が峯を軸として対称形に近く、峯の前後の両静水面付近に大きな加速度が作用することがわかる。また、(b)図の Case 6 の巻き波型砕波では、波の前傾化とともに加速度の分布も峯の位置から前面にかけて大きな加速度が集中して作用し、しかも、崩れ波と異なりその範囲が水底にまで達していることが



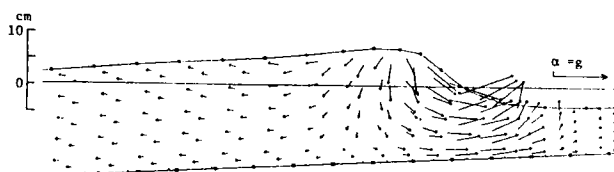
(a) - 1 Acceleration



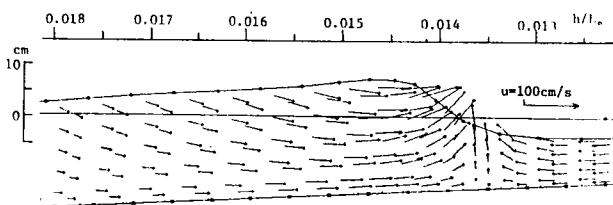
(a) - 2 Velocity

(a) Case 4, $H_0/L_0=0.0735$ (spilling breaker)

図-4.4.11 (a) 砕波型による加速度場および速度場の変化



(b) - 1 Acceleration



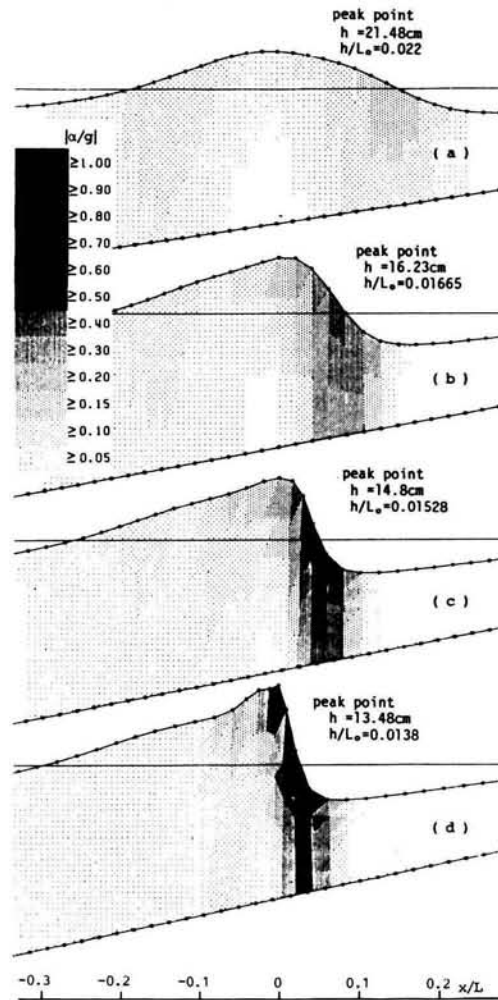
(b) - 2 Velocity

(b) Case 6, $H_0/L_0=0.0083$ (plunging breaker)

図-4.4.11 (b) 砕波型による加速度場および速度場の変化

示される。

図-4.4.12は、Case 6の巻き波型砕波の場合の水深減少に伴う加速度の比 $|\alpha|/g$ の分布を示したものである。図は、先と同様、波峯の各位置での波長と水深で規準化した1波を単位とした図であり、三角形要素の重心での $|\alpha|/g$ の値を濃淡により図化したものである。(a)図の水深が比較的大きな位置では、水面波形は前後に対称的であり、このとき、水面変動の時間的变化が急な前後の静水面付近での加速度が大であり、図-4.4.11の(a)図で示した崩れ波型砕波の場合と類似の分布であることがわかる。



Case 6, $H_0/L_0 = 0.0083$ (plunging breaker)

図-4.4.12 水深減少に伴う加速度分布の変化

水深の減少とともに、しだいに水面波形が前傾化するが、これとともに、加速度も波の峯から前面の谷での水面付近で増大し、その範囲は水底にまで達する。また、波の峯の背後では、加速度は急に減少し、ゆるやかな変化となることが示される。これは、進行波の谷と峯の区間では、 u および w とともに 0 から最大まで変化をする区間であり、波の前傾化とともに、この波峯の前面区間での水粒子速度の変化がより急激となって大きな加速度が作用するのである。この結果、(d)図の碎波近傍では、峯の前面で $|\alpha|/g > 1$ となる場所が出現することが Peregrine ら²⁶⁾ の結果と同様に示される。

以上、斜面上の碎波過程での水粒子加速度の分布特性について調べた研究はほとんど見受けられず、わずかに、Longuet-Higgins と Cokelet の理論²⁷⁾ を数値計算した Peregrine ら²⁶⁾ が、無限水深の波の碎波について取り扱っている程度である。

ここでは、上述のように、水深減少に伴う水粒子加速度場の変動および砕波型によるその分布特性を明らかにすることができた。

第5節 結 語

本章では、斜面上を進行し砕波する波の変形過程を、とくに内部機構との関連において明らかにするために、有限要素法の適用を試みたものであって、L. D. V. による水粒子速度の測定など実験結果による検証を行って、砕波に至る斜面上での波動場の時間的・空間的变化特性について検討した。

実験では、斜面勾配を $1/20$ および $1/30$ とし、砕波形態の異なる規則波を用いて実験を行った。第2節では、水粒子速度の測定として、L. D. V. を用いた実験装置、実験方法を述べ、また、実験と対比させるための数値シミュレーション方法を説明した。

第3節では、水深の減少に伴う波の諸量、すなわち、波高、波速、波形の変化を数値計算および実験結果より調べ、また、従来の定形波理論との比較を行って、それらの特性について検討した。その結果、本計算結果は、波の変形についての実験結果とよく一致し、砕波近傍まで十分な精度で計算できることが検証できた。さらに、従来の定形波理論では説明できない波の変形特性を砕波型と対比して明らかにすることができた。すなわち、砕波時の波高、水深は、従来経験的に求められた合田の砕波指標とはほぼ合致すること、また、水深減少に伴う変形過程においても計算結果は実験結果とよく一致すること、波高水深比 H/h 、波の峯高比 η_0/H 、波形の時間的前傾度 t_c/T および空間的前傾度 $\Delta x_c/L$ などの浅水変形過程が砕波の形態とよく対応することがわかった。また、波峯の水粒子速度 u_c は、砕波点近傍で急に増大し、砕波型に関係なく、いずれの場合も $u_c/C \div 0.9 \sim 0.95$ が計算上の限界となることから、 $u_c = C$ の条件で砕波すると考えてよいことがわかった。なお、斜面上の波に対する従来の定形波理論の適用性に関しては、それらが、浅水化にともなう水面波形の非対称性、とくに前後の非対称性を表現できない点に最大の問題があることを指摘し、このような水深変化に伴う波の変形についての正確な評価は、定形波理論では不十分であって、本計算法など十分な精度で計算し得る数値計算法によらざるを得ないことを示した。

第4節では、まず、L. D. V. による水粒子速度の測定結果と本数値計算結果との比較を行って、砕波近傍での水粒子速度場に対する本計算結果の妥当性を実証し、さらに、砕波近傍での水粒子のもつエネルギーと加速度の分布特性について砕波型と関連して考察した。その結果、有限要素法による本数値シミュレーション結果は、斜面上で変形し砕波に至る波の内部機構である水粒子の速度場についても実験結果とよく一致することが確かめられ、従来、ほとんど明確にされなかった砕波近傍での波動場の特性を砕波型と対応して明らかにすることができた。主要な結果を以下に要約して示すと次のようである。

(i) 砕波近傍での波動場の特性は、空間的な水面波形の形態とよく対応し、砕波形態による差異はその空間分布形状の対比によって明確となる。

(ii) 速度場の特性は、水面波形の形態とよく対応し、崩れ波型砕波では峯を中心に前後に比較対称

であって、この型の碎波では従来の定形波理論の適用性がある程度示される。また、巻き波型碎波では波の峯の前面での速度変化が急で、かつ水深方向には一様な分布形となる。

(iii) 碎波近傍での u/C の分布は、(ii) の速度場と同様の分布特性を示すが、いずれの碎波型においても、波峯部の水面近くの一部で 1 に近い値となることが示され、これからも碎波条件として $u_c=C$ が碎波型に関係なく適用されることがわかった。

(iv) 水粒子のもつエネルギーの沖波振幅比 E^*/a_0 の分布も、水面波形の形態とよく対応した分布となるが、波峯部に極大値を有する分布形となり、沖波波形勾配 H_0/L_0 が小さいほど E^*/a_0 の値が大となって碎波することが示された。さらに、水深減少とともにこの分布の局所的な集中度および集中場所の相違が生じ、かつ碎波型態によって特徴ある分布となり碎波に至ることがわかった。

(v) また、加速度場は、水粒子のもつエネルギー E^* の空間的な勾配として得られる分布であることから、 E^*/a_0 の分布状態と対応して示されるが、この特性は、速度変化の激しい峯の前面に大きな加速度が作用し、他方、峯の背後で急に減少するような分布となる。崩れ波から巻き波型碎波になるほど、峯から前面にかけて大きな加速度が作用し、その範囲は水底面近くまで及び、碎波近傍では、峯の前面部で重力 g より大となる場所が出現することがわかった。

参 考 文 献

- 1) Hamada, T. : Breakers and beach erosions, Transportation Tech. Res. Inst. Rep. No. 1, Ministry of Transportation, Japan, 1951.
- 2) Laitone, E. V. : The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, pp. 430-444, 1961.
- 3) Yamada, H. and T. Shiotani : On the highest water wave of permanent type, Bulletin of Dis. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 18, Part 2, No. 135, pp. 1-22, 1968.
- 4) Le Méhauté, B., D. Divoky and A. Lin : Shallow water waves, A comparison of theories and experiments, Proc. of the 11th Conf. on Coastal Eng., pp. 86-107, 1968.
- 5) Kolpak, M. M. and P. S. Eagleson : A system for measuring orbital velocity in waves, Proc. of the 12th Conf. on Coastal Eng., pp. 327-344, 1970.
- 6) Miller, R. L. and J. M. Zeigler : The internal velocity field in breaking waves, Proc. of the 9th Conf. on Coastal Eng., pp. 103-122, 1964.
- 7) Adeyemo, M. D. : Velocity fields in the breaker zone, Proc. of the 12th Conf. on Coastal Eng., pp. 435-460, 1970.

- 8) Biesel, f. : Study of wave propagation in water gradually varying depth, Gravity Waves Circular NO. 521, National Bureau of Stand., Gaithersburg, Md., pp. 243-253, 1952.
- 9) Gaughan, M. K. and P.D. Komar : The theory of wave propagation in water of gradually varying depth and the prediction of breaker type and height, Jour. Geophysical Res., Vol. 80, No. 21, pp. 2991-2996, 1975.
- 10) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島毅：斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について，第18回海岸工学講演会論文集， pp. 93-96, 1971.
- 11) 岩垣雄一・酒井哲郎・沢井信樹：斜面上の碎波の水粒子速度の鉛直分布と碎波型について，第20回海岸工学講演会論文集， pp. 553-557, 1973.
- 12) 岩垣雄一・酒井哲郎：Stream Function Theory による斜面上の碎波の水粒子速度の表現について，第21回海岸工学講演会論文集， pp. 27-32, 1974.
- 13) 安田孝志・山下隆男・後藤真太郎・土屋義人：K-dv方程式による斜面上の波の変形，第26回海岸工学講演会論文集， pp. 21-25, 1979.
- 14) 安田孝志・後藤真太郎・土屋義人：K-dv 方程式による斜面上の波の水粒子速度，第27回海岸工学講演会論文集， pp. 11-15, 1980.
- 15) Dean, R.G. : Stream function representation of nonlinear ocean waves, Jour. Geophysical Res., Vol. 70, No. 18, pp. 4561-4572, 1965.
- 16) Skjelbreia, L. : Gravity waves, Stokes' third order approximation, Table of function, Council on Wave Res., The Engineering Foundation, 1959.
- 17) 合田良美：碎波指標の整理について，土木学会論文報告集，第180号，1970.
- 18) 岩垣雄一・酒井哲郎：有限振幅波の Shoaling について(2)，第15回海岸工学講演会講演集， pp. 10-15, 1968.
- 19) Iversen, H.W. : Waves and breakers in shoaling water, Proc. of the 3rd Conf. on Coastal Eng., 1952.
- 20) 速水頌一郎：碎波の機構(Ⅱ)，第2回海岸工学講演会講演集，1954.
- 21) 酒井哲郎・J.A. Battjes : Cokerlet の理論による波の浅水変形，第27回海岸工学講演会論文集， pp. 25-29, 1980.
- 22) Cokerlet, E.D. : Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 286, pp. 183-230, 1977.
- 23) Shuto, N. : Non-linear long waves in a channel of variable section, Coastal Eng. in Japan, Vol. 17, pp. 1-17, 1974.

- 24) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第4報）——hyperbolic waves について(1)——，
京都大学防災研究所年報第10号B，pp. 283-294，1967.
- 岩垣雄一・塩田啓介：ハイパボリック波の表現式の再検討，第26回海岸工学講演会論文集，
pp. 31-35，1979.
- 25) 土屋義人・筒井茂明：波のエネルギー分配と碎波過程，第29回海岸工学講演会論文集，
pp. 125-129，1982.
- 26) Peregrine, D.H., E.D. Cokelet and P. McIver: The fluid mechanics of waves
approaching breaking, Proc. of the 17th Conf. on Coastal Eng., pp. 512-528,
1980.
- 27) Longuet-Higgins, M.S. and E.D. Cokelet: The deformation of steep surface
waves on water 1, A numerical method of computation, Proc. R. Soc. Lond.
A 350, pp. 1-26, 1976.

第 5 章 結 論

本論文は、浅海域における幾つかの波動問題に有限要素法を適用して、数値シミュレーション手法としての計算方法を確立するとともに、適用計算によって浅海波浪の変形特性の解明を試みたもので、得られた結果を要約して本論文の結論としたい。

まず、第 1 章では、沿岸海域での波の変形現象の究明は、海洋開発の動向ともあいまって、海岸工学や海岸水理学上の基本的課題であることを指摘するとともに、一般的な浅海域での波動問題に対する数値シミュレーション方法の重要性を示し、これに関する従来の研究が必ずしも十分でないことを述べて、本研究の目的および内容を明らかにした。

第 2 章では、まず、波動問題に対する従来有限要素法による解析例について説明し、これらの不十分な点を指摘して、本解析法の基本的な取り扱い手法を述べた。すなわち、速度ポテンシャルで表現される波動の支配方程式に対して、直接、変分原理を適用した有限要素法による解析を展開した。この方法は、水深の変化など境界形状の変化を直接考慮することができ、さらに、解析上の仮想境界では、流体運動の連続条件を考慮して任意境界領域を進行する浅海波の運動を解析することができるものであり、微小振幅波および有限振幅波の運動についての解析方法を示した。とくに、定式化に際しては、必要以上に式が繁雑とならないよう簡単な取り扱いを行って定式化し、さらに、要素分割の方法や要素分割のきざみによる計算精度について検討して、本計算法の有効な実用化を図った。

また、微小振幅波および有限振幅波に対する適用計算を行い、本計算法の妥当性を検証することができた。とくに、有限振幅波に対する本計算法については、造波実験による検証を行い、微小な振幅の波動からソリトンが発生する非線形性の強い有限振幅の波動にわたる広い範囲に対して十分な精度で計算できることを実証した。さらに、有限振幅の多成分波の運動への適用計算をも実施したが、これより、本解析法が、一般的な浅海域での不規則波を含む波動の数値シミュレーション手法として十分有効であり、広範な波動問題の解明に利用できることを示した。

第 3 章では、浅海域での構造物による波の変形あるいは波の制御効果など、波と構造物との相互作用の問題として、潜堤および浮体問題をとりあげ、これを 2 次元境界値問題とした有限要素法の適用法を示し、解析方法の妥当性を検証するとともに、適用計算によって、波と構造物の相互作用系における波動特性を検討した。

まず、透過性構造物など流体抵抗が存在する波動場の問題を取り扱った。すなわち、線形波動理論の適用によって、流体抵抗を流速に比例するとした等価線形抵抗係数を用い、さらに、波圧が流体と透過層の全領域で連続関数として与えられることに注目して、この問題を波圧で表現された境界値問題として有限要素法による解析方法を示した。この方法は、分割した要素ごとに、空隙率と抵抗係数によって決定される係数を与えるのみで全領域を同時に解析することができるので、構成材の異なる透過層や流

体域と透過層域とが混在する場合など、任意の状態にある透過性領域での流体運動を解析することができ、従来のこの種の解析法である領域分割法や Green 公式を用いる方法に比べて、より一般的状況に対応して容易に適用できる実用性を有する方法と思われる。ついで、沖合に設置する前衛消波構造物として、不透過潜堤、透過潜堤および干渉型潜堤の3種を取りあげ、これらに本計算手法を適用して、消波効果を明らかにし、その機構について考察を行った。

また、波と浮体との相互運動問題については、速度ポテンシャルで表現した浮体運動と流体運動の方程式を誘導し、これを連成して解くことにより、浮体および流体の相互の運動を同時に求める手法で、有限要素法の移動境界値問題への拡張を図ったものであって、相互運動の微小振幅および有限振幅運動の各場合についての定式化を示した。適用計算例および実験との比較によって、本計算法の妥当性を検証するとともに、相互運動系の特性について検討した。まず、浮体の各種強制運動による発生波の特性について調べ、とくに、強制運動の振幅が増加するとき、造波率に非線形効果が現われ、これが相互運動の有限振幅性によるものであることを明らかにした。また、波による浮体運動についても適用計算例を示して、その特性を検討した。とくに、運動の共振周波数近傍での浮体運動の非線形特性について調べ、入射波波形勾配 H_i/L の増加によって、浮体運動振幅比は微小振幅波理論による値よりも小となることを示し、さらに、この減少率が従来のような粘性に基因するエネルギー逸散のみの説明では不十分であることを示して、これが相互運動の有限振幅性による効果を含むことを明らかにした。

第4章では、波の変形の極限である砕波現象を解明するために、有限要素法の適用を試みたものであって、斜面上で砕波する有限振幅波をとりあげ、L. D. V.による水粒子速度の測定を行って、本数値シミュレーション手法の妥当性を検証するとともに、砕波に至る変形過程での水粒子速度場、エネルギー分布、加速度場などの内部機構の時間的・空間的な変化を砕波形態と対比して検討した。

本数値計算結果は、斜面上で変形し砕波に至る波の波高、波速、波形のみでなく、内部機構である水粒子速度とも、砕波近傍まで実験結果とよく一致し、これまで明確でなかった砕波近傍での波動場を精度よく計算できることが実証できた。

まず、砕波時の波高および水深は、合田の砕波指標とはほぼ合致しているが、その変形過程においても計算結果は実験結果とよく一致し、波高水深比 H/h 、峯高比 η_0/H 、時間的前傾度 t_c/T および空間的前傾度 $\Delta x_c/L$ などの浅水変形過程を明らかにし、これら波形の非対称性を示すパラメーターが砕波の形態とよく対応して砕波に至ることを示した。また、波峯部の水粒子速度 u_c は砕波点近傍で急に増大し、砕波型に関係なくいずれの場合も $u_c/C = 0.9 \sim 0.95$ で計算上の限界となることが示され、 $u_c = C$ を砕波条件とする従来の知見とはほぼ一致することがわかった。

ついで、砕波近傍での波動場の特性は、空間的な水面波形とよく対応し、砕波型による差異は、その空間的分布形状の対比によって明確になることがわかった。速度場の特性は、崩れ波型砕波では峯を中心に比較的前後に対称であり、この型の砕波では従来の定形波理論の適用の可能性が示され、また、巻き波型砕波では波峯前面での速度変化が急で、かつ水深方向には一様な分布形となる傾向にあることが

示された。また、水粒子のもつエネルギーの沖波振幅比 E^*/a_0 の砕波近傍での分布形状も水面波形とよく対応した分布となり、波峯部に極大値をもつ分布となるが、 H_0/L_0 が小さいほど E^*/a_0 の値が大となって砕波することが示され、水深の減少とともに E^*/a_0 の局所的な集中度および集中場所の相違が生じて、砕波形態による特性を有しながら砕波に至ることが示された。また、加速度場の特性は、速度変化の激しい峯前面で大きな加速度が作用し、峯の背後で急に減少することが示され、さらに、崩れ波から巻き波砕波になるほど峯前面で大きな加速度の集中が現われ、集中範囲も広がり、砕波近傍では、峯前面で重力 g よりも大となる場所が出現することが示された。

最後に、著者が、昭和57年4月より、流動研究員として京都大学工学部に滞在中、本研究の全搬にわたって終始暖かい御指導と適切な御助言を賜った京都大学工学部岩垣雄一教授に深甚な感謝の意を表するとともに、折にふれ、貴重な御助言と励ましの言葉を賜った京都大学工学部酒井哲郎助教授に深く感謝の意を表する。

また、研究の端緒から終始、全過程にわたって適切なご指導と有意義な討議を惜まれなかった熊本大学工学部田淵幹修講師に衷心より感謝の意を表する。

また、本論文作製にあたって御助力いただいた京都大学工学部土木工学教室海岸研究室の職員ならびに学生諸氏に謝意を表する。